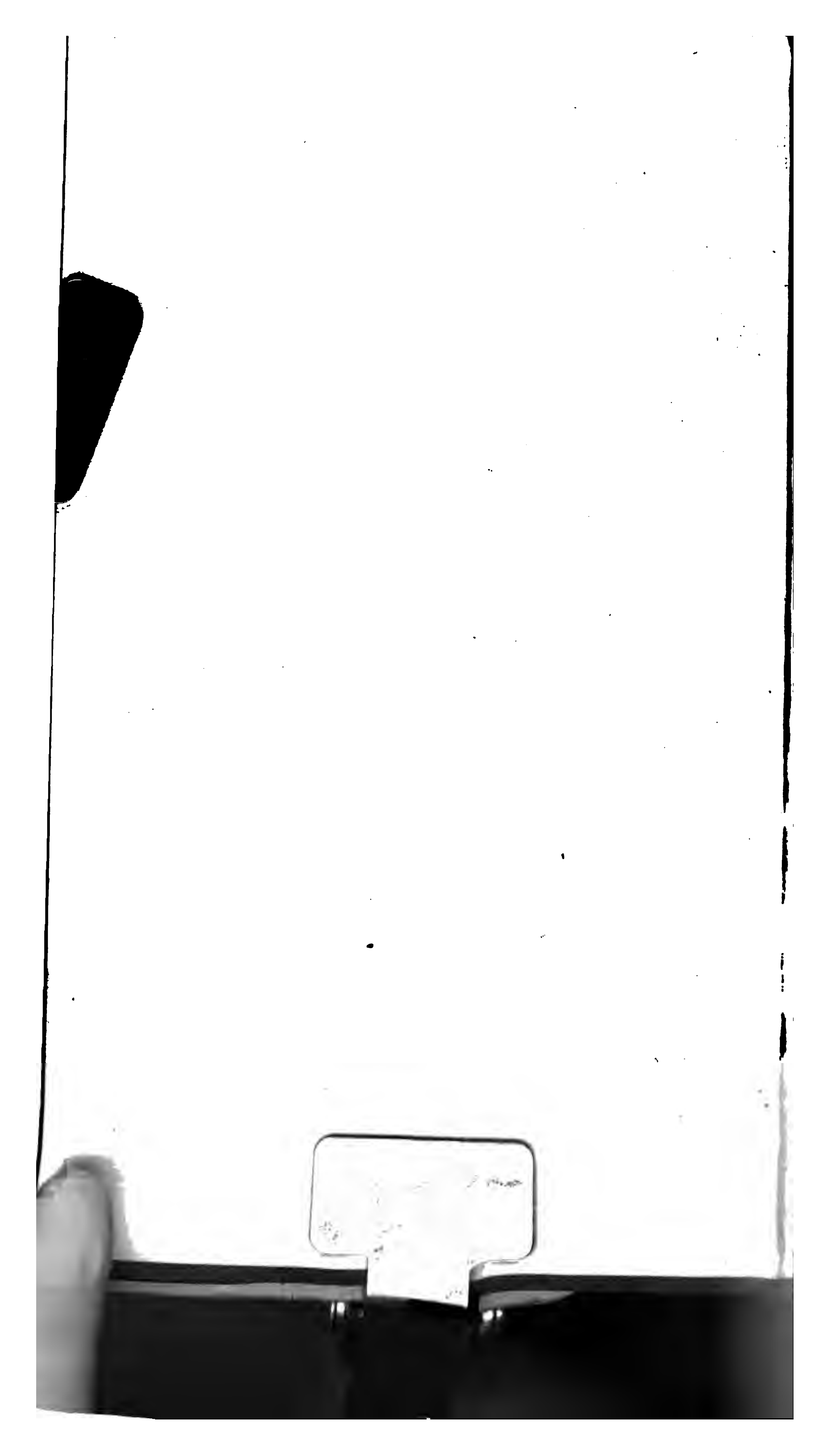
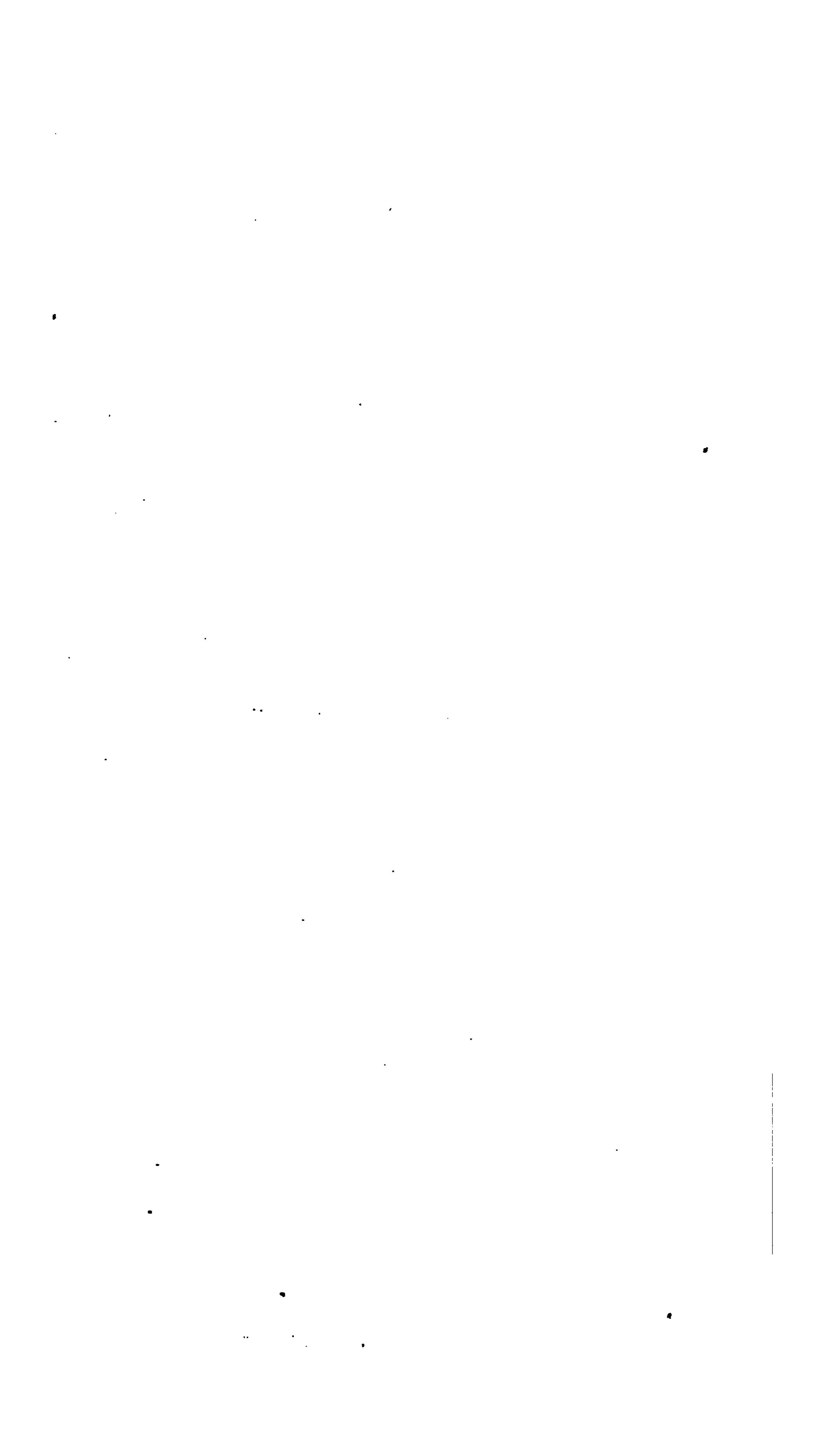
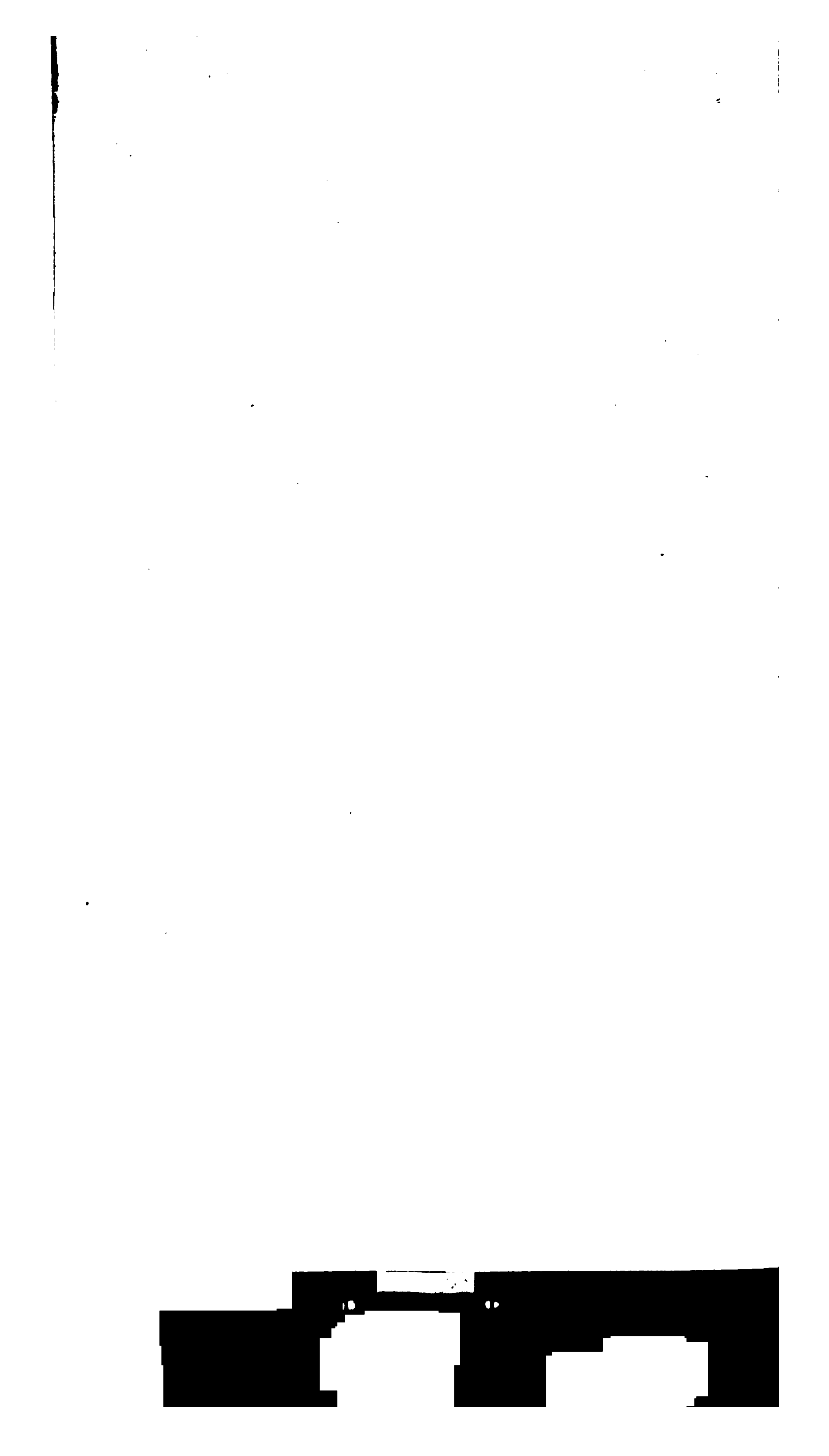






COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.



COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE,

PAR M. MAHISTRE,

Professeur de Mathématiques pures et appliquées à la Faculté des Sciences de Lille, Officier de l'Instruction publique, Membre de la Société impériale des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1858


BIBLIOTHECA · BODLEIANA ·

PRÉFACE.

L'ouvrage que nous publions aujourd'hui est pour ainsi dire à sa seconde édition ; autographié à Lille dans le courant de l'année scolaire 1855-56, il a été publié par abonnements et presque aussitôt épuisé.

Notre *Cours de Mécanique appliquée* est rédigé sous forme de leçons, où l'on apprendra, à la fois, les principes fondamentaux de la théorie, et leurs applications aux machines les plus importantes. Toutefois, nous avons restreint le plus possible les limites de la mécanique pure, afin d'élargir d'autant le cadre des applications.

La théorie des moteurs industriels a été traitée d'une manière à peu près complète. Celle des machines à vapeur, exposée d'après les principes de M. de Pambour, a été l'objet d'une étude toute particulière, car nous avons tenu compte dans les formules, ce qui n'avait pas encore été fait, non-seulement de la vapeur que chaque coup de piston laisse dans les espaces libres du système distributeur, mais encore des condensations qui se font pendant la détente. La question économique a été l'objet d'un examen attentif. Une machine étant donnée, nous faisons voir qu'on peut en construire une autre, marchant à la même vitesse, et faisant le même travail, avec moins de dépense, ou plus de travail avec la même dépense. Nous montrons encore comment on peut

calculer les sections des tuyaux destinés à conduire la vapeur des générateurs aux cylindres. Cette théorie nous a conduit à déterminer la vitesse que prendra d'elle-même une machine à vapeur, travaillant sous des pressions données, mais peu différentes, dans la chaudière, et dans le cylindre.

Nous donnons aussi une théorie nouvelle du régulateur à force centrifuge. Nos formules permettent d'installer cet ingénieux appareil avec tel degré de précision et de sensibilité qu'on voudra, et cela quelle que soit la résistance à vaincre.

Les difficultés inhérentes à la mécanique appliquée, l'obligation que nous nous sommes imposée de ne sortir que très-rarement du cadre des éléments des mathématiques, ont rendu notre tache souvent difficile; aussi nous réclamons la bienveillante indulgence de nos lecteurs.



TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME LEÇON. — Du travail des forces.

CINQUIÈME LEÇON. — Équilibre et composition générale des forces.

SIXIÈME LEÇON. — Du centre de gravité et de la force centrifuge.





SEPTIÈME LEÇON. — Des leviers.

HUITIÈME LEÇON. — Du plan incliné et du treuil.

NEUVIÈME LEÇON. — Transport des corps sur un plan horizontal.

DIXIÈME LEÇON. — Des moufles et de la vis.

ONZIÈME LEÇON. — Du treuil différentiel, du pont-levis, des grues, du cric, de la vis sans fin, du coin.

DOUZIÈME LEÇON. — Du régulateur à force centrifuge.

TREIZIÈME LEÇON. — Machines à vapeur.



QUATORZIÈME LEÇON — Machines de Wolff.

QUINZIÈME LEÇON. — De la détente du maximum d'effet.

SEIZIÈME LEÇON. — Théorie de la machine à vapeur, en tenant compte des condensations qui se font pendant la détente.

DIX-SEPTIÈME LEÇON. — Des machines quand leur vitesse est variable : principe de d'Alembert; principe des forces vives; théorème de Carnot.

DIX-HUITIÈME LEÇON. — Théorie des manivelles et des volants.

DIX-NEUVIÈME LEÇON. — Des moments d'inertie.

VINGTIÈME LEÇON. — Mouvement d'une figure plane dans son plan; notions sur quelques courbes usitées en mécanique; solution générale du problème des engrenages.



VINGT ET UNIÈME LEÇON. — Tracé des engrenages.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON. — Engrenages coniques; vis sans fin; engrenage de M. Olivier.

VINGT-TROISIÈME LEÇON. — Transformation des mouvements.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON. — Des pompes.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON. — Des pompes (suite).

VINGT-SIXIÈME LEÇON. — Machines qui servent à élever l'eau à de petites hauteurs.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON. — Écoulement des liquides.



VINGT-HUITIÈME LEÇON. — Écoulement des gaz et de la vapeur d'eau.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON — Roues hydrauliques dont l'axe est horizontal.

TRENTIÈME LEÇON. — Roues hydrauliques dont l'axe est vertical.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON. — Des moulins à vent.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON. — De la résistance des matériaux.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON. — Résistance des matériaux (suite); sphères et cylindres soumis à des pressions intérieures; résistance des bois à la compression.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON. — Résistance des matériaux (suite); de la flexion et de la torsion.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.





COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE(*)

PREMIÈRE LEÇON.

APERÇU DES PRINCIPES FONDAMENTAUX QUI SERVENT DE BASE A LA MÉCANIQUE.

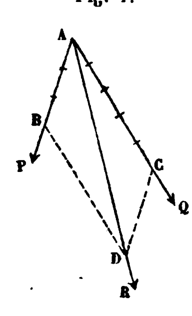
1. *Quand une force tient complétement lieu de plusieurs forces données, elle est dite la* résultante *de celles-ci, qui prennent à leur tour le nom de* composantes.

ÉNONCÉ DU PARALLÉLOGRAMME ET DU PARALLÉLIPIPÈDE DES FORCES.

La Mécanique repose pour ainsi dire sur un principe unique, qui est le *parallélogramme des forces,* et que j'énoncerai de la manière suivante :

Soient deux forces P et Q tirant respectivement de A vers P et de A vers Q (*fig.* 1) ; elles seront, pour fixer les idées, l'une de 3 kilogrammes, l'autre de 5 kilogrammes. Je prends sur AP une longueur AB de trois unités linéaires (l'unité linéaire peut être choisie à volonté), 3 mètres par exemple. Sur AQ je prends une longueur de 5 mètres; puis je construis le parallélogramme de la figure. Tirant ensuite la diagonale AD, non-seulement la résultante des forces proposées sera dirigée suivant AD, mais encore AD représentera

Fig. 1.

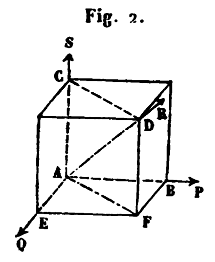


(*) Pour étudier ce Cours avec fruit, il suffit de connaître les Mathématiques élémentaires. Les articles, d'ailleurs assez rares, qui exigeront l'emploi des Mathématiques supérieures, seront marqués d'un astérisque.

son intensité; ce qui veut dire que la résultante contiendra autant de kilogrammes que AD contiendra de mètres.

2. *Parallélipipède des forces.* — Du principe qui précède découle le suivant: *Si trois forces* (P, Q, S) (fig. 2) *sont représentées en grandeur et en direction par les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle, la résultante sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale.*

Fig. 2.



Soient trois forces représentées en grandeur et en direction par les trois arêtes AB, AE, AC. Pour trouver leur résultante, je cherche d'abord celle des forces P et Q, laquelle sera représentée en grandeur et en direction par AF. Si l'on remarque maintenant que la figure AFCD est un parallélogramme, on en conclura que la résultante des forces AF et S est représentée par AD en grandeur et en direction. C. Q. F. D.

Réciproquement, étant donnée une force R, représentée par la diagonale AD, on pourra la remplacer par trois autres forces dirigées suivant trois droites rectangulaires (qu'on nomme *axes des coordonnées*) AB, AE, AC. Si l'on désigne par a, b, c les angles que la force R fait avec les portions ci-dessus des trois axes, les trois composantes cherchées auront pour valeurs

$$(1) \qquad X = R\cos a, \quad Y = R\cos b, \quad Z = R\cos c.$$

Si quelqu'un de ces trois angles était obtus, la composante correspondante tirerait suivant le prolongement de l'axe.

Si plusieurs forces agissent au même point et qu'on veuille avoir la résultante, on mènera par ce point trois axes rectangulaires; on décomposera chaque force en trois autres dirigées suivant les trois axes, puis on composera en une seule les forces agissant suivant chaque axe: le système général sera ainsi réduit à trois forces rectangulaires que l'on composera en une seule par la règle du parallélipipède des forces, et l'on





aura, en nommant X, Y, Z les trois composantes, et R leur résultante,

$$(2)\qquad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

(Je rappellerai, pour l'intelligence de la formule (2), que *le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés de trois arêtes contiguës.*)

Quant aux angles a, b, c, que la résultante fait avec les axes, ils se déduiront des relations

$$X = R\cos a,\quad Y = R\cos b,\quad Z = R\cos c,$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad \cos a = \frac{X}{R},\quad \cos b = \frac{Y}{R},\quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Les conditions d'équilibre de plusieurs forces agissant au même point se déduisent sans peine de ce qui précède, car pour l'équilibre on devra avoir

$$R = 0,\quad \text{et, par suite,}\quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Or, comme chaque terme de cette équation est positif, il faudra que chacun d'eux soit nul séparément, ce qui donne

$$(4)\qquad X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0.$$

NOTIONS SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ.

3. Dans chaque corps il existe un point tel, que le corps reste en équilibre si ce point est rendu fixe. Ce point, que nous définirons plus tard d'une manière plus exacte, est le *centre de gravité* du corps. On détermine sa position par l'expérience, en posant le corps proposé sur l'arête vive d'un autre jusqu'à l'équilibre.

Le centre de gravité d'un corps jouit d'une propriété remarquable qui sert à sa détermination géométrique, mais qui, pour être énoncée, exige quelques explications préliminaires.

On appelle *moment d'une force par rapport à un plan, le produit de cette force par la distance de son point d'application à ce plan.*

On appelle aussi *moment d'une ligne, d'une surface, d'une masse, etc., par rapport à un plan, le produit de cette ligne, de cette surface, de cette masse par la distance de son centre de gravité à ce plan.*

Cela posé, le *moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce même plan.*

Pareillement le *moment d'un système de lignes, de surfaces, de masses, par rapport à un plan, est égal à la somme des moments des lignes, des surfaces, des masses par rapport au même plan.*

Ainsi, par exemple, soient m, m', m'',..., les masses des molécules d'un corps; x, x', x'',..., les distances de ces molécules à un plan. Soient aussi M la somme des petites masses ou la masse totale du corps, et x_1 la distance de son centre de gravité au plan proposé. On aura la relation

$$(1) \qquad Mx_1 = Mx + M'x' + M''x'' + \dots$$

En rapportant le corps à trois axes rectangulaires, et nommant x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité, on aura, relativement aux trois plans coordonnés,

$$(2) \qquad \begin{cases} Mx_1 = \Sigma mx, \\ My_1 = \Sigma my, \\ Mz_1 = \Sigma mz, \end{cases}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les molécules de la masse M.

Les formules ci-dessus, faisant connaître x_1, y_1, z_1, assignent par cela même la position exacte du centre de gravité.

Nous donnerons plus tard une application remarquable de ces formules dans le calcul de la force centrifuge.

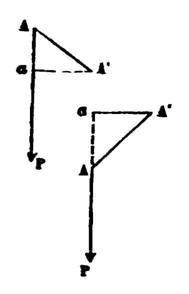
TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE D'UNE FORCE; ÉNONCÉ DE L'ÉQUATION DU TRAVAIL.

4. On nomme *travail élémentaire d'une force, le produit de cette force par la projection faite sur sa direction du chemin infiniment petit décrit par son point d'application.*



Ainsi, soit une force P appliquée au point A (*fig.* 3). Si le point A se transporte en un point infiniment voisin A′, et qu'on projette ensuite la ligne AA′ sur la direction de P, le travail élémentaire sera $P \times Aa$.

Fig. 3.



La projection Aa se désigne ordinairement par p; de sorte que le travail élémentaire de P sera représenté par Pp. Si la force était Q, le travail élémentaire serait Qq. Les deux figures ci-contre montrent que la projection du chemin parcouru tombe tantôt sur la direction même de la force, tantôt sur son prolongement. Dans le premier cas, le travail prend le nom de *travail moteur*; dans le second cas, celui de *travail résistant*. Le travail moteur est aussi considéré comme une quantité *positive*, et le travail résistant comme une quantité *négative*.

Les travaux élémentaires des forces jouissent de cette propriété remarquable, à savoir que *dans tout système en équilibre, la somme des travaux élémentaires moteurs est égale à la somme des travaux élémentaires résistants*, ou plus simplement, *la somme des travaux élémentaires est nulle*, en regardant les travaux moteurs comme *positifs* et les travaux résistants comme *négatifs*. Souvent il n'y a qu'une force motrice et qu'une force résistante à considérer. Dans ce cas, le *travail moteur est égal au travail résistant*.

Pour donner une application de ce principe, recherchons les conditions d'équilibre d'un corps A (*fig.* 4), pouvant glisser sans frottement sur un plan incliné, et retenu par une force parallèle au plan. Faisons mouvoir le corps A jusqu'en A′. Le travail de P sera un travail moteur ayant pour valeur $P.AA'$; et comme le travail de Q, savoir $Q.Aa$, est un travail résistant, on aura

Fig. 4.

$$P.AA' = Q.Aa.$$

Mais le triangle $AA'a$ est semblable au triangle $\alpha\alpha'\alpha''$; en comparant les côtés homologues, il vient

$$\frac{Aa}{AA'} = \frac{\alpha\alpha''}{\alpha\alpha'}.$$

Or l'équation $P.AA' = Q.Aa$ peut s'écrire

$$\frac{P}{Q} = \frac{Aa}{AA'},$$

en remplaçant, on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha\alpha''}{\alpha\alpha'} = \frac{h}{l};$$

d'où l'on conclut que lorsqu'un corps est retenu sur un plan incliné par une force parallèle à la longueur du plan, il faut pour l'équilibre que *la puissance soit à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

L'équation du travail renferme implicitement toutes les conditions d'équilibre; nous nous bornerons à en déduire les conditions d'équilibre de plusieurs forces qui tendent à faire tourner un corps autour d'un axe fixe, en agissant dans des plans perpendiculaires à cet axe.

ÉNONCÉ DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE AUTOUR D'UN AXE.

Quelques explications préliminaires nous sont d'abord nécessaires. On appelle *moment d'une force par rapport à un point, le produit de cette force par sa distance au point donné.*

Ainsi, soient P une force appliquée au point A (*fig.* 5), et O le point où l'axe de rotation perce le plan qui contient la force P; le moment de la force P par rapport au point O sera le produit abstrait $P.Oa$. La ligne Oa s'appelle aussi *bras de levier* de la force P.

Fig. 5.

Cela posé, *pour que plusieurs forces se fassent équilibre autour d'un axe de rotation, il faut et il suffit que la somme des moments des forces qui tendent à*

faire tourner dans un sens, soit égale à la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire; ou, ce qui revient au même, *il faut et il suffit que la somme des moments soit nulle,* en regardant comme *positifs* les moments qui tendent à faire tourner dans un sens, et comme *négatifs* ceux qui tendent à faire tourner en sens contraire.

Soient P, P′, P″, P‴,... (*fig.* 6) tant de forces qu'on voudra, agissant dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, et soit O le point où cet axe perce l'un quelconque de ces plans. Si nous imprimons au système, dans le sens de la flèche, un mouvement infiniment petit de rotation autour de l'axe O, en sorte que le point p se transporte en q, p' en q', etc., les travaux moteurs et les travaux résistants seront:

Fig. 6.

$$\text{travaux moteurs} \begin{cases} P.pq, \\ P'''.p'''q''', \end{cases} \qquad \text{travaux résistants} \begin{cases} P'.p'q', \\ P''.p''q''. \end{cases}$$

par conséquent, on aura la relation

$$P.pq + P'''.p'''q''' = P'.p'q' + P''.p''q''.$$

Soit φ la quantité dont on a fait tourner le système; les lignes pq, $p'q'$,..., pouvant être regardées comme des arcs de cercles ayant pour rayons Op, Op',..., on aura

$$pq = \varphi.Op, \quad p'q' = \varphi.Op', \quad p''q'' = \varphi.Op'', \quad p'''q''' = \varphi.Op''',\ldots$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, et supprimant l'angle commun φ, il reste

$$(1) \qquad P.Op + P'''.Op''' = P'.Op' + P''.Op''. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Comme on ne peut imprimer au système que deux mouvements opposés, il ne saurait résulter de l'équation du travail

d'autre relation que la précédente, puisque l'angle φ disparaît, quel que soit le sens de la rotation.

Si, les forces agissant dans le même plan, le système était entièrement libre, il faudrait, pour l'équilibre, non-seulement que l'équation des moments eût lieu relativement à un point quelconque du plan pris pour centre des moments, mais de plus que la résultante des forces fût nulle.

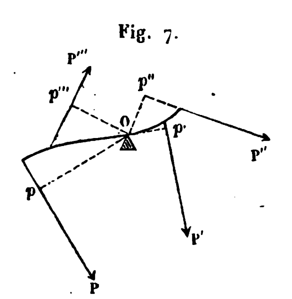
Tous ces principes seront démontrés plus tard.

LEVIER.

Soit un corps de forme quelconque pouvant tourner autour d'un point fixe.

Les forces et le point fixe étant situés dans le même plan, on aura, d'après ce qui précède, pour les conditions d'équilibre (*fig.* 7),

$$\mathrm{P}.\mathrm{O}p = \mathrm{P}'.\mathrm{O}p' + \mathrm{P}''.\mathrm{O}p'' + \mathrm{P}'''.\mathrm{O}p'''.$$



De sorte que, *pour que plusieurs forces se fassent équilibre à l'aide d'un levier, il faut et il suffit que la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, soit égale à la somme de celles qui tendent à le faire tourner en sens contraire.*

ÉNONCÉ DU PRINCIPE DES FORCES VIVES.

5. Lorsque tant de forces qu'on voudra agissent sur une machine, chacune d'elles développe, pendant un temps infiniment petit, une quantité infiniment petite de travail. La somme des travaux ainsi développés pendant un temps donné par les forces mouvantes est ce qu'on appelle le *travail moteur relatif à cet intervalle de temps*; et de même la somme des travaux élémentaires développés pendant le même temps par les forces résistantes est ce qu'on appelle le *travail résistant.*



Dans le travail résistant il faut distinguer : 1° le travail développé par la résistance principale, c'est-à-dire par la résistance que la machine est destinée à vaincre ; cette partie du travail résistant se nomme *travail utile;* 2° le travail dû aux frottements, lequel est susceptible d'être calculé ; 3° le travail dû à la résistance de l'air, le travail produit par les vibrations des supports, etc. Ces derniers travaux, qui ne sont pas susceptibles d'évaluation, constituent le *travail nuisible.*

Une partie du travail moteur est absorbée à chaque instant par les résistances nuisibles. Cela posé, si l'on nomme T_m et T_r les travaux moteurs et résistants développés pendant un temps donné θ, v_0 et v les vitesses d'une molécule quelconque au commencement et à la fin de l'intervalle θ, on aura la relation

$$(1) \qquad T_m - T_r = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les molécules en mouvement.

Si la machine se meut d'un mouvement uniforme, on aura

$$v = v_0,$$

et l'équation ci-dessus deviendra

$$(2) \qquad T_m = T_r.$$

Ce qui montre que dans ce cas *tout le travail moteur se change en travail résistant.* C'est là ce qui a fait nommer le principe des forces vives, *principe de la transmission du travail.*

On appelle *force vive d'un point matériel le produit de la masse par le carré de la vitesse de ce point matériel.*

Si l'on considère une machine depuis l'instant où elle commence à se mouvoir jusqu'à ce qu'elle s'arrête, on aura

$$v_0 = 0, \quad v = 0,$$

et, par suite,

$$T_m - T_r = 0;$$

de sorte que quel que soit le mouvement d'une machine, depuis l'instant qu'elle commence à se mouvoir jusqu'à ce qu'elle

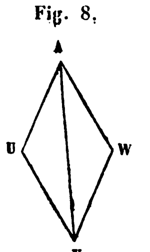
s'arrête, tout le travail moteur se change en travail résistant. Il faut conclure de là que si à certains moments la vitesse s'accélère, l'excès du travail moteur qui en résulte se met en réserve dans les pièces du système pour se dépenser quand surviendra un ralentissement; de telle sorte qu'à la fin il se sera établi une compensation exacte entre les variations du travail moteur et celles du travail résistant.

ÉNONCÉ DU THÉORÈME DE CARNOT; SON APPLICATION A LA THÉORIE DES ROUES HYDRAULIQUES.

6. Toutes les fois qu'il se produit des chocs dans une machine, les pièces qui éprouvent des percussions se compriment, et de là naissent de puissantes résistances moléculaires qui donnent lieu à des pertes de travail souvent considérables. Ces pertes de travail s'évaluent à l'aide du théorème de Carnot que nous énoncerons tout à l'heure, mais qui suppose les corps dépourvus d'élasticité, circonstance, du reste, qui se produit bientôt dans les machines en mouvement.

Supposons donc un choc entre deux molécules de matière. Soient V la vitesse avant le choc (*fig.* 8), W la vitesse après le choc, et A la molécule que l'on considère; AV représentant la vitesse V et AW la vitesse W. Si l'on achève le parallélogramme de la figure, $AU = u$ sera ce qu'on nomme la *vitesse perdue* pendant le choc. On voit que *la vitesse perdue est la vitesse qui, étant composée avec la vitesse après le choc, par la règle du parallélogramme des vitesses, donne la vitesse avant le choc.*

Fig. 8.



Cela posé, Carnot a démontré que lorsqu'il y avait des chocs dans les machines, l'équation des forces vives devenait

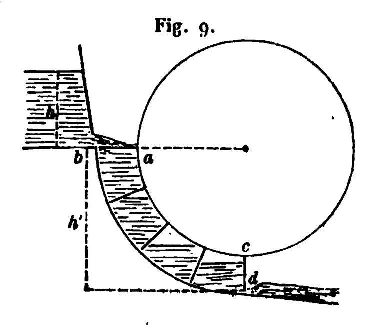
$$(1) \qquad T_m - T_r = \frac{1}{2}\Sigma m(W^2 - V^2) + \frac{1}{2}\Sigma mu^2.$$

Le premier signe Σ s'étend à toutes les molécules en mouvement, le second à toutes les molécules qui éprouvent des per-

cussions, comme à tous les chocs successifs qui ont lieu pendant l'intervalle de temps que l'on considère.

Le théorème de Carnot comprend toute la théorie des roues hydrauliques. Pour montrer l'usage qu'on peut en faire, supposons une masse d'eau arrivant sur l'aube *ab* (*fig.* 9) d'une roue avec la vitesse V et quittant cette aube en *cd* avec la vitesse W; *u* étant la vitesse perdue par l'effet du choc de l'eau tombant sur l'aube, et observant qu'ici les quantités V, W, *u* sont les mêmes pour toutes les molécules liquides, l'équation (1) deviendra

Fig. 9.



$$(2)\qquad T_m - T_r = \frac{1}{2}(W^2 - V^2)\Sigma m + \frac{1}{2}u^2\Sigma m,$$

et plus simplement

$$T_m - T_r = \frac{1}{2}(W^2 + u^2)\Sigma m - \frac{1}{2}V^2\Sigma m.$$

Soit h la hauteur de la chute, comptée jusqu'à l'endroit où l'eau commence à frapper l'aube; soit aussi h' la hauteur verticale pendant laquelle l'eau agit sur l'aube : on aura, d'après les lois de la physique,

$$V^2 = 2gh, \quad (g = 9^{m},8088);$$

et comme ici $T_m = Ph'$, P étant le poids de l'eau qui agit sur l'aube, l'équation ci-dessus deviendra

$$Ph' - T_r = \frac{1}{2}(u^2 + W^2)\Sigma m - gh\Sigma m.$$

Résolvant cette équation par rapport à T_r, on trouve

$$T_r = Ph' + gh\Sigma m - \frac{1}{2}(u^2 + W^2)\Sigma m.$$

Mais on verra dans la théorie de la mesure des forces que

$$\Sigma m = \frac{P}{g};$$

donc

$$T_r = Ph' + Ph - \frac{P}{2g}(u^2 + W^2).$$

Faisant, pour abréger,

$$h + h' = H,$$

on obtient définitivement

$$(3) \qquad T_r = PH - \frac{P}{2g}(u^2 + W^2).$$

Telle est la valeur du travail transmis à la roue par la chute d'eau. On voit que ce travail sera d'autant plus grand, que le second terme de la formule (3) sera plus petit. Le maximum de T_r répondra donc au cas où le deuxième terme sera nul, ce qui arrivera quand on aura

$$u = 0, \quad W = 0,$$

c'est-à-dire *quand l'eau arrivera sans choc sur la roue et en sortira sans vitesse.*

La roue Poncelet et quelques autres roues hydrauliques réalisent cette condition.



DEUXIÈME LEÇON.

MESURE DES FORCES.

REPOS ET MOUVEMENT ABSOLUS.

7. *Un corps est dit en repos, toutes les fois que ses diverses parties persévèrent dans la même place; il est en mouvement toutes les fois que ses diverses parties, ou seulement quelques-unes, occupent successivement différents lieux dans l'espace.*

Le mouvement et le repos tels qu'ils viennent d'être définis, sont le *repos absolu* et le *mouvement absolu*.

REPOS ET MOUVEMENT RELATIFS.

On appelle *repos relatif* l'état d'un corps qui conserve constamment la même place par rapport à d'autres corps regardés comme en repos, quoique le système puisse être transporté d'un mouvement commun.

De même, le *mouvement relatif* est l'état d'un corps qui change de place par rapport à d'autres corps regardés comme en repos, quoique le système puisse être transporté d'un mouvement commun.

Si, par exemple, la terre est supposée immobile dans l'espace, et que l'on considère le mouvement d'un bateau qui descend le courant d'un fleuve, ce mouvement sera un mouvement absolu. Le voyageur assis ou se promenant sur le pont offrira l'exemple d'un repos ou d'un mouvement relatifs.

MOUVEMENT UNIFORME, VITESSE.

Un corps est animé d'un mouvement uniforme toutes les fois qu'il parcourt des espaces égaux dans des temps égaux.

La vitesse du mobile, dans le mouvement uniforme, est

l'espace parcouru dans l'unité de temps; par exemple dans une seconde.

MOUVEMENT VARIÉ, FORCE, INERTIE.

Tout mouvement qui n'est pas uniforme est un mouvement varié.

On appelle *force* tout ce qui produit où tend à produire le mouvement.

Quand un corps est en repos, il est évident qu'il restera en repos tant qu'une force étrangère ne viendra pas le solliciter à se mouvoir.

De même, s'il est en mouvement, il ne pourra de lui-même modifier son état de mouvement sans l'intervention d'une force extérieure.

Pour se rendre compte de l'inertie dans le mouvement, supposons qu'on lance une bille, d'abord sur un sol recouvert d'une couche de sable, puis, et avec la même impulsion, sur un billard, et enfin sur une nappe de glace. Il est clair que, dans le premier cas, le mouvement de la bille sera presque nul; sur le billard, le mouvement aura plus de durée; enfin, sur la glace, elle parcourra un long espace.

Ainsi, à mesure que les obstacles au mouvement diminuent, le mouvement se continue plus longtemps; d'où l'on peut conclure que *si les obstacles au mouvement cessaient tout à fait, le mouvement se continuerait indéfiniment.*

De plus, un corps libre mis en mouvement et abandonné à lui-même prendrait un *mouvement rectiligne et uniforme;* car il n'y a pas de raison pour qu'il en fût autrement.

Une foule de phénomènes familiers manifestent l'inertie de la matière; j'en citerai quelques-uns.

Tout le monde sait qu'on ne peut s'arrêter quand on veut, alors qu'on descend une pente en courant.

Un boulet tiré verticalement par un canon monté sur une voiture lancée au galop tombe toujours auprès de la voiture.

Quand un navire est sous voiles, une balle qu'un mousse laisse tomber du haut d'un mât tombe au pied du mât.



Quand on veut vider l'eau d'un vase, on imprime à celui-ci un mouvement rapide qu'on arrête brusquement; le liquide sort en vertu de la vitesse acquise, etc. C'est de la même manière qu'on lance une pierre avec la main.

Je citerai encore, comme exemple de mouvement qui se continue longtemps, l'expérience de Mariotte, laquelle consiste à suspendre à un fil d'environ 5 mètres une balle de plomb d'environ une livre. On l'éloigne d'à peu près 3 mètres, puis on lui imprime un mouvement circulaire, et l'on compte plus de quatre cents tours représentant plus de 1400 mètres, et le mouvement de la balle se continue longtemps encore.

VITESSE DANS LE MOUVEMENT VARIÉ.

Le mouvement varié ne saurait évidemment être produit que par une force qui agit sur le mobile d'une manière continue ou intermittente. Une telle force prend le nom de *force accélératrice*.

Cela posé, on nomme *vitesse du mobile à un instant donné, la vitesse du mouvement rectiligne et uniforme que prendrait le mobile, si à cet instant la force accélératrice cessait tout à coup son action*.

Supposons, par exemple, qu'on veuille connaître la vitesse d'une locomotive à 3 kilomètres de distance d'une gare. La machine étant mise en mouvement, lorsque le mécanicien arrivera vis-à-vis le troisième poteau kilométrique, il supprimera complétement la vapeur. A partir de cet instant, la machine se mouvra d'un mouvement uniforme (on suppose nulles les forces passives), et il n'y aura plus qu'à mesurer l'espace parcouru dans la seconde qui suivra l'instant où l'action de la force motrice a été suspendue.

VITESSE MOYENNE.

Quand un point matériel se meut d'un mouvement varié, *la vitesse moyenne*, *relative à un certain espace parcouru*,

est égale à cet espace divisé par le temps employé à le décrire.

La vitesse moyenne coïncide avec la vitesse vraie quand l'espace parcouru est infiniment petit.

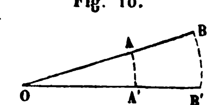
VITESSE ANGULAIRE.

Quand un corps se meut autour d'un axe, on nomme *vitesse angulaire* la vitesse de tout point qui est distant de l'axe d'une quantité égale à l'unité linéaire, de 1 mètre par exemple.

La vitesse angulaire étant connue, la *vitesse absolue d'un point quelconque s'en déduit en multipliant la vitesse angulaire par la distance à l'axe du point que l'on considère.*

En effet, soient O (*fig.* 10) le centre de rotation et OA $= 1^{m}$; soit aussi un point B tel, qu'on ait OB $= r$. Si nous supposons que la vitesse du point A soit représentée par AA' $= \omega$, celle du point B le sera par BB' $= v$. Or on sait que deux arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, par conséquent

Fig. 10.



$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{OB}{OA}.$$

Mais

$$BB' = v, \quad AA' = \omega, \quad OB = r, \quad OA = 1;$$

donc

$$\frac{v}{\omega} = \frac{r}{1}, \quad \text{d'où} \quad v = \omega r. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.

Un mouvement est uniformément varié toutes les fois que la vitesse du mobile croît ou décroît de quantités égales dans des temps égaux.

Dans le premier cas, le mouvement est *uniformément accéléré;* dans le second cas, il est *uniformément retardé.*

ACCÉLÉRATION DE LA VITESSE.

Dans le mouvement uniformément varié, on nomme *accélération de la vitesse* la variation de la vitesse du mobile pendant l'unité de temps.

Le mouvement uniformément varié ne saurait être produit évidemment que par l'action d'une force accélératrice constante.

Un corps pesant qui se meut verticalement dans le vide offre l'exemple d'un mouvement uniformément varié. S'il descend, son mouvement est uniformément accéléré; s'il monte, son mouvement est uniformément retardé.

Si l'on nomme g l'accélération de la vitesse dans le mouvement uniformément varié, v la vitesse acquise au bout d'un temps quelconque t, a la vitesse initiale (vitesse d'impulsion), on aura

$$v = a + gt, \tag{1}$$

dans le mouvement uniformément accéléré;

$$v = a - gt, \tag{2}$$

dans le mouvement uniformément retardé.

On peut remarquer que la formule (1) comprend la formule (2) en y regardant g comme une quantité positive ou négative suivant que le mouvement est uniformément accéléré ou retardé.

Quand la force qui sollicite le mobile est la pesanteur, l'*accélération* ou la *gravité* a pour valeur

$$g = 9^{m},8088.$$

FORCES QUE L'INDUSTRIE EMPLOIE.

8. Pour mettre les machines en mouvement, l'industrie emploie diverses forces. Les principales sont : l'expansion de la vapeur d'eau; la pesanteur pour mettre en mouvement les roues hydrauliques; les moteurs animés qui agissent soit par leur poids, soit par leur action musculaire; la vitesse du vent;

les forces électriques, qui ne sont guère usitées que dans la télégraphie. A ces forces il faut joindre la force centrifuge qui se développe par la rotation et qu'on utilise, soit pour élever l'eau, sécher les tissus, séparer le sucre des sirops, etc.

DÉFINITION DE DEUX FORCES ÉGALES.

9. *Deux forces sont dites égales toutes les fois qu'étant appliquées au même point et en sens contraires, elles se font équilibre.*

D'après cela, une force sera dite *double*, *triple*, etc., d'une autre, toutes les fois qu'il faudra *deux*, *trois*, etc., forces reconnues égales à celle-ci, pour faire équilibre à la première. D'où il suit que les forces sont susceptibles d'être exprimées en nombres comme toute espèce de quantités.

DÉFINITION DE DEUX MASSES ÉGALES.

Deux points matériels sont dits égaux en masse, toutes les fois qu'une même force ou deux forces reconnues égales leur impriment la même vitesse dans le même temps.

De là il résulte que :

1°. *Deux forces sont entre elles comme les vitesses qu'elles impriment dans le même temps à la même masse ou à des masses égales.* (Il s'agit toujours de points matériels.)

2°. *Deux forces sont entre elles comme les masses auxquelles elles impriment dans le même temps des vitesses égales.*

De ces deux propriétés, il résulte que:

Deux forces sont entre elles comme les masses multipliées par les vitesses qu'elles leur impriment dans le même temps.

En effet, disposons comme ci-après les éléments de la démonstration :

FORCES.	MASSES.	VITESSES.
F,	m,	v,
φ,	m,	v',
F',	m',	v'.



Soient F et F′ deux forces quelconques imprimant dans le même temps, aux points matériels m et m', les vitesses w, w'; je dis qu'on aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{mw}{m'w'}.$$

Comparons d'abord la force F à une force φ imprimant dans le temps ci-dessus la vitesse w' à la masse m, on aura

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{w}{w'}.$$

Comparant de même la force φ à la force F′, on a

$$\frac{\varphi}{F'} = \frac{m}{m'}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre et supprimant le facteur commun φ, il vient

$$\frac{F}{F'} = \frac{mw}{m'w'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

MESURE DES FORCES.

Soient F une force quelconque et w l'accélération ou la vitesse qu'elle imprime au mobile dans l'unité de temps, et comparons cette force à une force F′ de 1 kilogramme que nous prendrons pour unité. Si nous choisissons pour unité de masse une masse telle, que la force de 1 kilogramme lui imprime, en 1 seconde, une vitesse de 1 mètre, nous aurons à la fois

$$F' = 1^{\text{kil}}, \quad m' = 1, \quad w' = 1,$$

et, par suite,

$$F = mw. \tag{1}$$

Ce qui fait voir qu'*une force quelconque a pour mesure la masse qu'elle sollicite multipliée par l'accélération*, pourvu qu'on prenne pour *unité de masse* la masse à laquelle une force de 1 kilogramme imprime, en 1 seconde, une vitesse de 1 mètre.

S'il s'agit de la pesanteur, on aura, en nommant P le poids

du corps, m sa masse, g la gravité,

$$(2) \qquad P = mg;$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad m = \frac{P}{g}.$$

Si $m = 1$, on aura

$$P = g;$$

et comme $g = 9^{m},8088,\ldots$, on en conclut que l'*unité de masse pèse* $9^{k},8088$.

Si dans un temps infiniment petit τ une force F imprime à la masse m une vitesse u, la force aura aussi pour mesure

$$(4) \qquad F = m.\frac{u}{\tau}.$$

En effet, w étant toujours l'accélération, on a

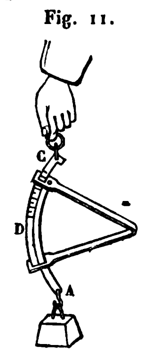
$$u = w\tau, \quad \text{d'où} \quad w = \frac{u}{\tau};$$

par suite la formule (1) se transforme dans la formule (4).

MESURE DES FORCES A L'AIDE DU DYNAMOMÈTRE.

Les forces ne peuvent pas toujours être rapportées à leurs accélérations; tels sont, par exemple, les efforts développés par les moteurs animés. Dans ce cas, on a recours au dynamomètre, qui n'est autre chose qu'un ressort plus ou moins flexible. On conçoit que le degré de flexion d'un tel ressort puisse servir à mesurer la force qui produit cette flexion. La *fig.* 11 montre le dynamomètre réduit à sa plus simple expression. On devine sans peine les dispositions de l'instrument. Pour le graduer, on suspend au point A successivement des poids de 1, 2, 3, etc., kilogrammes. A chaque fois les deux lames du ressort se rapprochent, et l'on marque sur CD la graduation correspondante aux poids essayés. Les subdivisions qui correspondent aux fractions de kilogramme s'obtiennent de la même manière.

Fig. 11.





TROISIÈME LEÇON.

COMPOSITION DES VITESSES ET DES FORCES.

COEXISTENCE DES MOUVEMENTS.

10. Tout le monde sait qu'un corps peut être animé de mouvements très-divers, lesquels coexistent sans se troubler. Ainsi, quelle que soit la rapidité et la direction de la marche d'une personne, elle ne dérange pas pour cela la régularité de sa montre dont les rouages participent néanmoins à tous ses mouvements.

Mais étudions la question de plus près, et nous reconnaîtrons que chaque rouage est animé de plusieurs autres mouvements.

La roue que l'on considère :

1°. Est animée des mêmes mouvements que celui qui la porte;

2°. Elle possède la vitesse de rotation de la terre autour de son axe;

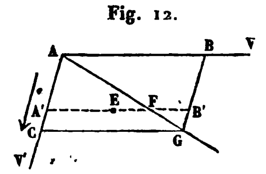
3°. Elle est transportée avec la terre autour du soleil, avec une vitesse d'environ 7 lieues par seconde;

4°. Comme le système solaire paraît être animé d'un mouvement de translation dirigé vers la constellation d'Hercule, la roue dont il s'agit possède encore ce dernier mouvement.

PARALLÉLOGRAMME ET PARALLÉLIPIPÈDE DES VITESSES.

Soit A (*fig.* 12) un point matériel s'avançant d'un mouvement uniforme de A vers B avec la vitesse V. Supposons en même temps que le plan de la figure soit transporté de A vers *c*, dans le sens de la flèche, et d'un mouvement uniforme

Fig. 12.



dont la vitesse sera V'. Prenant $AB = V\theta$, $AC = V'\theta$ (θ étant un intervalle de temps quelconque), et achevant le parallélogramme, je dis qu'*après chaque instant le mobile sera situé sur la diagonale* AG, *et de plus qu'on aura, en nommant* w *la vitesse résultante,*

$$\frac{w}{V} = \frac{AG}{AB}.$$

En effet, soit t le temps que le mobile met à parvenir en A' avec la vitesse V', on aura

$$AA' = V't;$$

car, si dans une seconde le mobile parcourt V', en t secondes il parcourra t fois V' ou $V't$; et comme, par hypothèse, $AC = V'\theta$, on trouve, en prenant le rapport,

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{t}{\theta}.$$

Soit maintenant E la position du mobile sur la ligne AB, laquelle s'est transportée en $A'B'$; on aura pareillement

$$A'E = Vt.$$

Divisant par $A'B' = V\theta$, il vient

$$\frac{A'E}{CG} = \frac{t}{\theta},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{A'E}{CG}.$$

Mais les triangles semblables ACG, $AA'F$ donnent

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{A'F}{CG}.$$

Comparant avec l'égalité qui précède, on en tire

$$A'E = A'F.$$

Ce qui fait voir que le *mobile sera constamment sur la diagonale.*



La comparaison des mêmes triangles donne encore

$$\frac{AF}{AG}=\frac{AA'}{AC}=\frac{t}{\theta};$$

donc

$$AF=\frac{AG}{\theta}t.$$

Or, si dans cette égalité on fait $t=1''$, AF deviendra la vitesse w, et l'on aura

$$w=\frac{AG}{\theta}.$$

Divisant les deux membres par V, il vient

$$\frac{w}{V}=\frac{AG}{V\theta}=\frac{AG}{AB}.$$ C. Q. F. D.

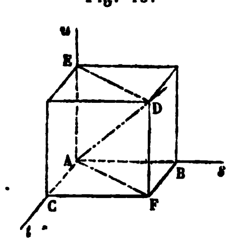
Cette égalité fait voir que si l'on prend $AB=V$, on aura aussi

$$w=AG;$$

par conséquent, *si les côtés* AB, AC *du parallélogramme* ABCG *représentent les vitesses du mobile en grandeur et en direction, la diagonale* AG *représentera la vitesse résultante en grandeur et en direction.*

Si un point matériel A (fig. 13) *est animé de trois vitesses simultanées* s, t, u, *représentées en grandeur et en direction par les trois arêtes contiguës* AB, AC, AE *d'un parallélipipède rectangle, la vitesse résultante sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale* AD.

Fig. 13.



D'abord la résultante des vitesses s, t est représentée par AF en grandeur et en direction; et comme la figure AEDF est aussi un parallélogramme, on en conclut que la résultante des vitesses AF et u est représentée par AD en grandeur et en direction. C. Q. F. D.

Quant à la valeur numérique de la vitesse résultante $AD=V$,

on aura

$$V^2 = s^2 + t^2 + u^2.$$

Une vitesse donnée peut aussi se décomposer en trois autres dirigées suivant trois axes rectangulaires.

Mais nous ne nous arrêterons pas à ces développements qui sont identiques avec ceux que nous avons donnés dans la première leçon, à la suite de l'énoncé du parallélipipède des forces.

PARALLÉLOGRAMME ET PARALLÉLIPIPÈDE DES ROTATIONS.

Supposons un mobile animé de deux mouvements de rotation, l'un autour de l'axe AP (*fig.* 14), l'autre autour de AQ, et soient ω, ω' les vitesses angulaires de ces deux mouvements. Pour concevoir cette double rotation, on peut d'abord supposer que le corps tourne autour de AQ, et ensuite que ce dernier axe est entraîné à son tour autour de AP, emportant le mobile avec lui. Cela posé, je prends à partir du point A des lignes AB, AC telles, qu'on ait

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\omega}{\omega'},$$

et dans une direction telle, qu'en mettant l'œil en P et Q, on voie le mouvement s'effectuer dans le même sens, par exemple dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre; sur ces lignes je construis le parallélogramme ABCD, et je dis: 1° *que les deux rotations se composeront en une seule autour de la diagonale* AD; 2° *que la vitesse angulaire résultante* Ω *sera telle, qu'on aura*

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{AD}{AB}.$$

Quant au sens de la rotation, on la verra s'effectuer de gauche à droite en mettant l'œil en D.

D'abord dans l'élément τ du temps, le point A reste fixe comme appartenant aux deux axes de rotation; je dis aussi qu'il en sera de même du point D.

En effet, en vertu de la rotation autour de AP, le point D s'abaisse au-dessous du plan de la figure de la quantité

$$\omega\tau . Dp.$$

En vertu de la rotation autour de AQ, le même point D s'élève de la quantité

$$\omega'\tau . Dq.$$

Donc le point D restera fixe pendant l'instant τ, si l'on a

$$\omega\tau . Dp = \omega'\tau . Dq, \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{Dq}{Dp}.$$

Remarquons que les triangles rectangles DCq, DBp sont semblables, ayant chacun un angle égal à BAC; alors la comparaison des côtés homologues donne

$$\frac{DC}{DB} = \frac{Dq}{Dp};$$

mais

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AB}{AC} = \frac{\omega}{\omega'},$$

par conséquent

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{Dq}{Dp}.$$

Ainsi *la diagonale* AD *est l'axe autour duquel se fait la rotation résultante.*

Cherchons la vitesse angulaire de ce mouvement, et pour cela déterminons le déplacement élémentaire du point C. Le point C étant situé sur l'axe AQ, ne se déplacera qu'en vertu de sa rotation autour de AP; de plus, ce déplacement aura pour valeur

$$\omega\tau . Cn.$$

Mais en vertu de la rotation résultante, ce déplacement est aussi égal à

$$\Omega\tau . Cm;$$

donc

$$\Omega\tau . Cm = \omega\tau . Cn.$$

De là on tire

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{Cn}{Cm}.$$

Si nous remarquons maintenant que l'aire du parallélogramme ABCD a pour mesure AD.Cm et AB.Cn, on aura

$$\mathrm{AD}.\mathrm{C}m = \mathrm{AB}.\mathrm{C}n, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{C}m}.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{C}m} = \frac{\Omega}{\omega}; \quad \text{donc aussi} \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on prend $\mathrm{AB} = \omega$, on aura

$$\Omega = \mathrm{AB}.$$

Le parallélipipède des rotations se déduira sans peine de ce qui précède.

PARALLÉLOGRAMME ET PARALLÉLIPIPÈDE DES FORCES.

11. Soient deux forces, P et Q (*fig.* 14), agissant sur le point A, je prends, sur la direction des forces, des lignes AB, AC telles, qu'on ait

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}};$$

sur AB et AC je construis un parallélogramme, et je dis que:

1°. *La résultante* R *des forces* P *et* Q *sera dirigée suivant la diagonale* AD;

2°. *Qu'on aura la relation*

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

En effet, dans un instant infiniment petit, les forces P et Q impriment au point A des vitesses infiniment petites s, u, dirigées suivant AB et AC. En vertu du parallélogramme des vitesses, la vitesse résultante V du point A sera telle, qu'on aura

$$\frac{\mathrm{V}}{s} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

Fig. 14.

Or la résultante des forces P et Q, devant produire sur le mobile le même effet que ces deux forces, devra être capable d'imprimer au point A, dans la direction AD, la vitesse V dans le même temps infiniment petit que ci-dessus; cette force R devra donc agir suivant AD. Pour trouver son intensité, nous rappellerons que *deux forces sont entre elles comme les vitesses qu'elles impriment dans le même temps à la même masse;* on aura donc

$$\frac{R}{P} = \frac{V}{s}.$$

Mais on a déjà trouvé

$$\frac{V}{s} = \frac{AD}{AB};$$

donc aussi

$$\frac{R}{P} = \frac{AD}{AB}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit que si l'on prend

$$AB = P,$$

on aura

$$R = AD;$$

d'où l'on conclut que *si les côtés d'un parallélogramme représentent les forces en grandeur et en direction, la diagonale représentera la résultante en grandeur et en direction;* ce qui est d'accord avec l'énoncé plus élémentaire, mais moins général, que nous avons donné dans la première leçon.

La propriété du parallélogramme des forces ramène le calcul de la résultante à un simple problème de trigonométrie. En effet, on a

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\,AB.BD.\cos ABD.$$

Mais

$$AD = R, \quad AB = P, \quad BD = Q,$$

et

$$\cos ABD = -\cos A$$

(car $ABD = 180^\circ - A$); par suite

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos A.$$

Si $A = 90°$, on a simplement

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

On peut remarquer que la composition des vitesses, celle des rotations et des forces, ont pour base le même théorème. De là il suit que toutes les propriétés qui dépendront de la composition des forces conviendront aussi aux vitesses et aux rotations.

RÉCIPROQUE DU PARALLÉLOGRAMME DES FORCES.

Réciproquement, *si d'un point quelconque, pris sur la direction de la résultante de deux forces, on mène des parallèles aux composantes, celles-ci seront entre elles comme les côtés du parallélogramme ainsi formé.*

Soient deux forces P et Q (*fig.* 15) telles, que leur résultante soit dirigée suivant AD. Par un point quelconque D pris sur cette ligne, je mène deux parallèles aux deux composantes, et je dis qu'on aura

Fig. 15.

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AC}.$$

En effet, si cette égalité n'a pas lieu, on pourra toujours trouver un quatrième terme AE tel, qu'on ait

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AE}.$$

Mais alors si l'on achève le parallélogramme ABEF, la résultante des forces P et Q sera dirigée suivant AF, ce qui est contraire à l'hypothèse.

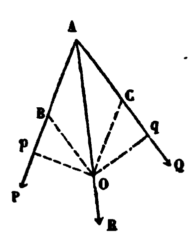
PROPRIÉTÉ DE CHAQUE POINT DE LA RÉSULTANTE.

Théorème. — *Si d'un point quelconque de la résultante de deux forces, on mène des perpendiculaires sur les directions de ces forces, celles-ci seront en raison inverse des longueurs de ces perpendiculaires.*



Soit O (*fig.* 16) un point quelconque pris sur la direction de la résultante des forces P et Q, je dis qu'on aura

Fig. 16.



$$\frac{P}{Q} = \frac{Oq}{Op}, \quad \text{ou} \quad P.Op = Q.Oq.$$

Par le point O je mène des parallèles aux forces, et l'on aura, par ce qui précède,

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AC} = \frac{OC}{OB}.$$

Mais les triangles rectangles OBp, OCq sont semblables; car les deux angles OBp, OCq sont égaux comme étant égaux chacun à l'angle BAC : la comparaison des côtés homologues donne alors

$$\frac{OC}{OB} = \frac{Oq}{Op}.$$

Mais déjà

$$\frac{P}{Q} = \frac{OC}{OB};$$

donc aussi

$$\frac{P}{Q} = \frac{Oq}{Op}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Comme, en multipliant en croix, l'égalité précédente donne

$$P.Op = Q.Oq,$$

on peut énoncer le théorème précédent en disant que :

Les deux forces multipliées par leurs distances à un même point quelconque de la résultante donnent des produits égaux.

Réciproquement, *si pour un point quelconque* O *pris dans l'angle de deux forces on a la relation*

$$P.Op = Q.Oq,$$

ce point sera situé sur la direction de la résultante.

En effet, de l'égalité ci-dessus on tire d'abord

$$\frac{P}{Q} = \frac{Oq}{Op}.$$

Ensuite les triangles semblables OCq, OBp donnent

$$\frac{Oq}{Op} = \frac{AB}{AC},$$

et, en comparant ces deux rapports,

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AC};$$

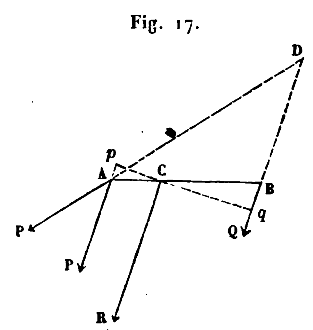
d'où il suit que le point O est situé sur la direction de la résultante des deux forces. C. Q. F. D.

Le principe du parallélipipède des forces se déduit du parallélogramme des forces ainsi que nous l'avons montré dans la première leçon, il serait superflu d'y revenir.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

12. Soient deux forces P et Q qui concourent au point D (*fig.* 17); elles auront une résultante dirigée dans l'angle ADB. Si l'on fait tourner l'une des forces, la force P par exemple, jusqu'à la rendre parallèle à Q, la résultante deviendra elle-même parallèle à Q, et sera située entre les deux composantes. Soit C le point où elle rencontre AB.

Fig. 17.



En vertu de la propriété démontrée au numéro précédent, on aura

$$P.Cp = Q.Cq, \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{Q} = \frac{Cq}{Cp}.$$

Mais les triangles ACp, CBq qui sont semblables, donnent

$$\frac{Cq}{Cp} = \frac{CB}{CA};$$

donc aussi

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{CA}, \quad \text{d'où} \quad P.CA = Q.CB.$$

Il reste encore à connaître l'intensité de la résultante. Avant de rendre les forces parallèles, on a

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos D;$$

les forces devenant parallèles,

$$D = 0, \quad \cos D = 1,$$

et, par suite,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ = (P + Q)^2, \quad \text{d'où} \quad R = P + Q.$$

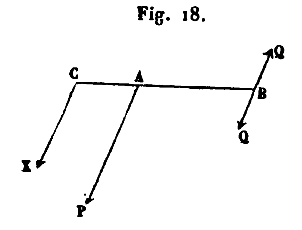
Ainsi *deux forces parallèles et de même sens ont une résultante égale à leur somme, parallèle à leur direction commune, et cette résultante divise la droite qui joint les points d'application des forces en deux parties inversement proportionnelles aux forces; ou, ce qui revient au même, le point d'application de la résultante est placé de telle sorte, que chaque force multipliée par sa distance à ce point donne un produit égal.*

COMPOSITION DE DEUX FORCES PARALLÈLES ET DE SENS CONTRAIRE.

La résultante de deux forces parallèles et de sens contraire pourrait aussi se déduire du parallélogramme des forces, mais il sera plus simple de l'obtenir de la manière suivante:

Soient les deux forces proposées P et Q (*fig.* 18) et prenons $P > Q$. Je remplace la plus grande force P par deux autres forces parallèles, l'une Q appliquée au point B, l'autre X appliquée à gauche du point A en un point C dont il s'agit d'assigner la position. On remarquera d'abord que les forces P et Q ayant été remplacées par les trois forces X, Q, Q, et ces deux dernières se détruisant, il ne reste que X qui est par conséquent la résultante cherchée. Pour déterminer X, on a en premier lieu

Fig. 18.



$$P = Q + X, \quad \text{d'où} \quad X = P - Q.$$

En second lieu, comme le point A est le point d'application

des forces X et Q,

$$X.AC = Q.AB,$$

d'où l'on tire

$$AC = \frac{Q.AB}{X} = \frac{Q.AB}{P - Q}.$$

On connaît ainsi la force X et le point C.

On peut remarquer en passant que si l'on avait

$$P = Q,$$

AC serait infinie. Dans ce cas, il n'y aurait donc pas de résultante. Et en effet, deux forces égales, parallèles et de sens contraire ne sauraient être remplacées par une force unique, car il n'y a pas de raison pour que cette force soit placée plutôt d'un côté que de l'autre des composantes. *Le système de deux forces égales et parallèles forme ce qu'on appelle un couple.*

Reprenons l'égalité

$$X.AC = Q.AB,$$

qui devient, en y remplaçant X par sa valeur,

$$(P - Q)\,AC = Q.AB.$$

Développant le premier membre, on en tire

$$P.AC = Q.AC + Q.AB = Q(AC + AB) = Q.BC.$$

Ce qui fait voir que *chaque force multipliée par sa distance au point d'application de la résultante donne un produit égal.*

On voit donc que la propriété ci-dessus convient aux forces parallèles comme aux forces concourantes.

La réciproque de ces théorèmes se démontrerait sans difficulté.

On peut conclure de ce qui précède que : *La résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra est égale à leur somme, en regardant comme positives les forces qui tirent dans un sens, et comme négatives celles qui tirent en sens contraire.*



APPLICATIONS DIVERSES.

13. Problème. — *Atteler deux chevaux de manière à faire tirer chacun suivant sa force.*

Supposons les forces P et Q (*fig.* 19) des deux chevaux dans le rapport de m à n, et posons, pour abréger,

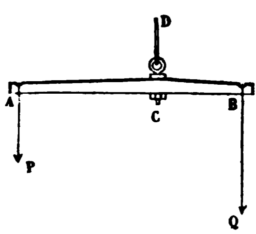


Fig. 19.

$$AB = l.$$

Connaissant la résistance R à la traction, il s'agit de déterminer les efforts P et Q des deux chevaux ainsi que le point C où la résultante des deux forces sera appliquée; car c'est à ce point qu'on devra fixer la barre CD de *trait* destinée à mouvoir la résistance.

Pour déterminer les quatre inconnues

$$AC, \quad BC, \quad P, \quad Q,$$

on aura les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{c} AC + BC = l, \\ P + Q = R, \\ P.AC = Q.BC, \\ \dfrac{P}{Q} = \dfrac{m}{n}. \end{array}\right.$$

Résolvant ces quatre équations, on trouve sans peine

$$AC = \frac{nl}{m+n}, \tag{1}$$

$$BC = \frac{ml}{m+n}, \tag{2}$$

$$P = \frac{mR}{m+n}, \tag{3}$$

$$Q = \frac{nR}{m+n}. \tag{4}$$

Si, par exemple, $l = 1^m$, $m = 2$, $n = 3$, $R = 600^k$, on trouvera

$$AC = \frac{3 \times 1}{5} = 0^m,6,$$

$$BC = \frac{2 \times 1}{5} = 0^m,4,$$

$$P = \frac{2 \times 600}{2+3} = 240^k,$$

$$Q = \frac{3 \times 600}{2+3} = 360^k.$$

PRESSION D'UN VOLANT SUR SES COUSSINETS.

PROBLÈME. — *Calculer la pression d'un volant, et en général d'une roue sur ses coussinets.*

Fig. 20.

Soit O (*fig.* 20) le centre du volant que je supposerai, pour plus de généralité, monté à des distances inégales des tourillons dont les rayons seront r et r'. g étant le centre de gravité du système, le poids du volant et du cylindre pourra être regardé comme une force Q appliquée au centre de gravité, et il s'agit de décomposer la force Q en deux autres forces parallèles appliquées aux points A et B.

Posant, pour abréger, $gA = a$, $gB = b$, et nommant P et P′ les composantes inconnues, on aura pour les déterminer les deux relations

$$\begin{cases} P + P' = Q, \\ Pa = P'b, \end{cases}$$

lesquelles étant résolues, donnent

$$(5) \qquad P = \frac{Qb}{a+b},$$

$$(6) \qquad P' = \frac{Qa}{a+b}.$$

Supposons, par exemple, $Q = 12000^k$, $a = 0^m,80$, $b = 0^m,30$.

les formules ci-dessus donnent

$$P = \frac{12000 \times 0,30}{1,1} = 3272^{k},7,$$

$$Q = \frac{12000 \times 0,80}{1,1} = 8727^{k},3.$$

TRAVAIL ABSORBÉ PAR LES FROTTEMENTS DES TOURILLONS SUR LES COUSSINETS.

PROBLÈME. — *Calculer le travail absorbé par les frottements d'un volant, et en général d'une roue sur ses coussinets.*

Quand un corps mobile glisse sur un corps fixe, le corps mobile éprouve, en sens contraire de son mouvement, une résistance qu'on nomme *frottement;* cette force est proportionnelle à la pression totale qui s'exerce entre les surfaces de contact, et elle ne dépend pas de l'étendue de ces surfaces; de sorte que si l'on nomme P la pression sur un coussinet, f un coefficient qui dépendra de la nature des matières frottantes, F le frottement, on aura

$$F = fP.$$

Maintenant, si l'on nomme s l'élément infiniment petit décrit par le milieu du tourillon, le travail élémentaire dû au frottement sera, en ayant égard à son signe,

$$t = -fPs.$$

Pour un nombre n de rotations pareilles, on aura

$$nt = -fnPs.$$

Posant, pour abréger, $ns = S$, le travail développé sur toute l'étendue de l'arc S sera

$$(7) \qquad nt = -fPS.$$

Pour une rotation entière du volant et pour les deux tourillons, on aura successivement

$$S = 2\pi r, \quad S = 2\pi r',$$

et la formule (7) donnera

$$nt = -2fP\pi r,$$
$$n't' = -2fP'\pi r'.$$

Ajoutant et posant, pour abréger, $nt + n't' = T$, le travail total sera

$$(8) \qquad T = -2f\pi(Pr + P'r').$$

Si $r = r'$, cette égalité devient

$$(9) \qquad T = -2f\pi rQ.$$

De sorte que si les deux tourillons sont de même rayon, le travail absorbé est le même que si le volant tournait autour de son centre de gravité et sur un tourillon fictif d'un rayon égal à celui des tourillons vrais. Dans ce cas, le calcul des pressions devient inutile pour la détermination du travail.

La formule (8) montre que *le travail absorbé par les frottements sera d'autant moindre que les tourillons seront plus petits*. Il est donc avantageux de ne donner aux tourillons que les dimensions que comportent les résistances dont ils doivent être capables.

Pour donner une application numérique de la formule (8), supposons $r = 0^m,05$, $r' = 0^m,07$. Si les tourillons sont huilés, on aura, pour la valeur moyenne de f,

$$f = 0,12.$$

Par suite, le travail absorbé pour une rotation sera, en adoptant pour P et P′ les valeurs calculées plus haut,

$$T = 584^{km} \text{ (kilogrammètres environ).}$$

(Le kilogrammètre est l'unité de travail; c'est le travail effectué en élevant un poids de 1 kilogramme à 1 mètre de hauteur. Le travail développé pour élever un poids de 75 kilogrammes à 1 mètre de hauteur est ce qu'on nomme le cheval-vapeur.)

Supposons maintenant que le volant fasse 20 tours par minute, le travail correspondant à cet intervalle de temps



sera

$$584 \times 20^{km}.$$

Pour une seconde, il deviendra

$$\frac{584 \times 20}{60} = 194^{km},66,$$

et si l'on divise par 75, on aura, pour le travail estimé en chevaux-vapeur,

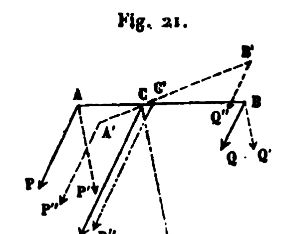
$$T = 2^{ch},6.$$

Ainsi dans l'exemple choisi, le volant absorbe $2^{ch.v}$,6 *de force*. On verra plus loin (n° 34) que la formule (8) n'est vraie que par approximation.

DÉFINITION DU CENTRE DES FORCES PARALLÈLES.

14. Soient deux forces parallèles et de même sens, P et Q (*fig.* 21), appliquées sur la droite AB. Le point C d'application de la résultante se déterminera par la relation

Fig. 21.



$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}.$$

Supposons maintenant qu'on change les directions des forces P et Q sans changer leur intensité, et, plus généralement, sans altérer leur rapport; le point d'application de la résultante des nouvelles forces parallèles P' et Q' se déterminera encore par la relation

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{BC}{AC},$$

et comme $\frac{P'}{Q'} = \frac{P}{Q}$, le point C ainsi trouvé sera le même qu'auparavant.

Supposons maintenant qu'on laisse aux forces leur première direction, mais qu'on déplace AB; AB devenant A'B' et les forces P et Q devenant aussi P'', Q'', le point C' d'application

de la résultante se déterminera toujours par la relation

$$\frac{P''}{Q''} = \frac{P}{Q} = \frac{B'C'}{A'C'},$$

et l'on tombera encore sur le même point.

Par conséquent, *si l'on fait tourner autour de leurs points d'application deux forces parallèles dont le rapport reste constant, la résultante passera toujours par le même point de la droite qui joint les points d'application des forces. La même chose aura lieu si, sans changer le rapport et la direction des forces, on déplace la droite d'application. Ce point par lequel vient constamment passer la direction de la résultante de deux forces parallèles se nomme* centre des forces parallèles.

On arrivera évidemment de proche en proche à la même conclusion pour tant de forces parallèles qu'on voudra.

Donc, *si l'on fait tourner autour de leurs points d'application, tant de forces parallèles qu'on voudra diminuées ou augmentées toutes dans le même rapport, la résultante tournera aussi autour de son point d'application, mais en restant constamment parallèle aux composantes.*

Si, au lieu de changer la direction des forces, on déplace le système des points d'application, supposé invariable, la résultante passera toujours par le même point du système proposé.

Ce point par lequel passe constamment la direction de la résultante de plusieurs forces parallèles est le centre des forces parallèles.

Si le centre d'un système de forces parallèles est rendu fixe, le système restera en équilibre autour de ce point, soit qu'on change la direction des forces, soit qu'on fasse tourner autour de ce point le système proposé; et, en effet, la résultante passant toujours par le point fixe, sera constamment détruite par sa résistance.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS.

Les actions de la pesanteur, étant perpendiculaires à la surface des eaux tranquilles, sont sensiblement parallèles dans toute l'étendue d'un même corps.

Cela posé, *on appelle* centre de gravité *du corps, le centre de ce système de forces parallèles.*

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN VOLUME, D'UNE SURFACE, D'UNE LIGNE.

Le centre de gravité d'un volume est le centre des forces parallèles qui seraient appliquées aux divers points de ce volume, et qui seraient proportionnelles à ses éléments. Le centre de gravité d'une surface, d'une ligne, se définit de la même manière.

Ainsi, par exemple, *les forces appliquées aux divers points du volume doivent être telles, que leur résultante, pour chaque centimètre cube, soit de même intensité.*

QUATRIÈME LEÇON.

DU TRAVAIL DES FORCES.

DÉFINITION DU TRAVAIL.

15. Je définirai le travail, l'*effet produit par une force qui déplace son point d'application*. Ainsi le manœuvre qui transporte un fardeau d'un étage à l'autre d'un échafaudage, n'accomplit un certain travail que parce qu'il déplace le point d'application de l'effort qu'il développe, effort qui est égal au poids de la charge. Le travail serait nul si, la charge étant trop lourde, il ne pouvait la soulever malgré ses plus grands efforts. Le menuisier qui promène sa varlope sur une pièce de charpente n'accomplit un travail que lorsque le tranchant de l'instrument mord sur le bois, attendu que dans ce cas seulement il a déplacé le point d'application de la force. Le terrassier qui creuse un fossé et qui jette la terre sur la berge, déplace le point d'application de la force qu'il développe. Il n'accomplirait aucun travail si le sol, étant trop dur, résistait à l'action de la pelle. Le laboureur qui creuse un sillon avec la charrue déplace, à chaque instant, le point d'application de la force. Les machines à filer le lin déplacent le point d'application de la force, en allongeant les fibres du lin, en les aplatissant ou les tordant.

Si l'on voulait poursuivre cet examen, on verrait que partout où il y a travail, il y a une force qui déplace son point d'application.

UNITÉ DE TRAVAIL, KILOGRAMMÈTRE.

On a pris pour unité de travail, *le travail qui consiste à élever un poids de 1 kilogramme à 1 mètre de hauteur, indépendamment du temps employé.*



Le travail qui consiste à élever un poids de 1000 kilogrammes à 1 mètre de hauteur se nomme quelquefois *grande unité dynamique*.

MESURE DU TRAVAIL DYNAMIQUE.

Le travail d'une force dont le point d'application décrit une ligne droite a pour mesure le produit de cette force par le chemin que son point d'application parcourt suivant sa direction. (Il ne faut pas perdre de vue que le chemin ainsi mesuré n'est autre chose que le chemin effectif projeté sur la direction de la force. Ce n'est qu'en l'estimant ainsi que les travaux des forces jouissent des propriétés remarquables que nous démontrerons ci-après.) Et, en effet, supposons qu'un moteur élève un poids de 4 kilogrammes à 5 mètres de hauteur. 4 kilogrammes élevés à 5 mètres exigent évidemment le même travail que pour élever 5 fois 4 kilogrammes à 1 mètre. Or 5 fois 4 kilogrammes élevés à 1 mètre représentent un travail de 4×5 kilogrammètres. Donc, etc.

Si l'on veut donner à la démonstration une forme plus mathématique, on en disposera les éléments comme ci-après :

TRAVAUX.	FORCES.	CHEMINS.
T	P	p.
$\mathfrak{T}$	P	p'.
T'	P'	p'.

Soient T et T' les travaux effectués pour élever deux poids P et P' à des hauteurs p et p', je dis qu'on aura

$$\frac{T}{T'} = \frac{Pp}{P'p'}.$$

Je fais d'abord remarquer que les efforts développés par les moteurs sont égaux aux poids P, P' qui représentent ainsi les forces proposées. Je compare le travail T au travail $\mathfrak{T}$ développé par un moteur capable d'élever le poids P à la hauteur p', on aura évidemment

$$\frac{T}{\mathfrak{T}} = \frac{p}{p'}.$$

Comparant ensuite $\mathfrak{T}$ à T′, il vient

$$\frac{\mathfrak{T}}{T'} = \frac{P}{P'}.$$

Multipliant membre à membre et réduisant, on a

$$\frac{T}{T'} = \frac{Pp}{P'p'}.$$

Ce qui montre que *les travaux de deux forces sont entre eux comme les produits de ces forces multipliées par les chemins parcourus par leurs points d'application, parallèlement à leurs directions.*

Si l'on compare le travail quelconque T au travail T′ qui consiste à élever un poids de 1 kilogramme à 1 mètre de hauteur, on aura

$$P' = 1^{k}, \quad p' = 1^{m},$$

et l'égalité ci-dessus deviendra

$$\frac{T}{T'} = Pp.$$

Maintenant si l'on choisit T′ pour être l'unité de travail dynamique, on aura

$$T' = 1^{km}, \quad \text{et, par suite,} \quad T = Pp. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

JUSTESSE DU MOT TRAVAIL.

Le mot *travail* défini comme ci-dessus est encore nommé par quelques auteurs *effet dynamique;* mais la première expression, qui a été proposée par Coriolis, a généralement prévalu. Pour montrer toute sa justesse, considérons le travail produit en une journée par un ouvrier employé, par exemple, à tirer de l'eau d'un puits avec un seau attaché à une corde qui s'enroule sur un tour. Supposons que le puits ait 5 mètres de profondeur et que l'ouvrier, dans sa journée, fasse monter 100 seaux contenant chacun 20 litres. Le travail journalier estimé en kilogrammètres sera

$$100 \times 20 \times 5 = 10000 \text{ kilogrammètres.}$$

Admettons maintenant que le puits ait 10 mètres de profondeur. Évidemment l'ouvrier ne tirera que 50 seaux dans sa journée. Mais le travail effectué, estimé en kilogrammètres, sera encore

$$50 \times 20 \times 10 = 100 \times 20 \times 5 = 10000 \text{ kilogrammètres.}$$

Ce qui fait voir que *pour des quantités égales de travail dynamique, l'ouvrier recevra le même salaire.*

RÉSULTATS D'EXPÉRIENCES FAITES SUR LE TRAVAIL DES MOTEURS ANIMÉS.

Si un moteur cherche à déplacer une résistance trop grande, ses efforts, quelque grands qu'ils soient, resteront impuissants et le travail sera nul. Si la résistance est très-faible ou même nulle, le travail sera encora nul, quelque grand que soit l'espace parcouru par le moteur. *Il doit donc exister une valeur de la vitesse et de la résistance telle, que le travail soit un* maximum.

Pour les moteurs animés, cette valeur de la vitesse et de la résistance ne peut s'obtenir que par l'expérience. Pour les machines, cette détermination est un résultat de la théorie qui fait connaître la vitesse répondant au maximum d'effet; cette vitesse étant connue, il ne reste qu'à régler la résistance de manière à faire prendre à la machine la vitesse voulue.

TABLEAU des quantités de Travail journalières fournies par les moteurs animés.

UNITÉ DE TRAVAIL : *Travail consistant a élever* 1000^k *à* 1 *mètre de hauteur.*

NATURE DU TRAVAIL.	EFFORT moyen.	VITESSE moyenne par seconde.	DURÉE du travail journalier.	QUANTITÉS de travail journalières	TRAVAIL accompli en une heure.
POUR LES HOMMES.					
Un homme montant un escalier ou une rampe douce, son travail consistant dans l'élévation de son corps................	kil. »	mètres. »	8	280	h 35
Un manœuvre élevant des poids avec une corde et une poulie, ce qui oblige à faire descendre la corde à vide..............	18	0,20	6	78	13
Un manœuvre élevant des poids et les soulevant avec la main....	»	»	6	73	12,2
Un manœuvre élevant des poids en les portant sur son dos, au haut d'une rampe douce, et revenant à vide...............	65	0,04	6	56	9,3
Un manœuvre élevant des terres à la pelle, à la hauteur moyenne de $1^m,60$..................	»	»	10	38	3,8
Un manœuvre agissant sur une roue à chevilles ou à tambour (ces roues sont nuisibles à la santé des ouvriers) :					
1°. Au niveau de l'axe.....	60	0,15	8	259	32
2°. Vers le bas de la roue...	»	»	8	251	31,4
Un manœuvre agissant sur une manivelle..................	8	0,75	8	173	21,6
POUR LES CHEVAUX.					
Un cheval attelé au manége et allant au pas................	45	0,90	8	1166	145,75
Un cheval attelé au manége et allant au trot................	30	2	4,5	972	216
Un bœuf attelé au manége et allant au pas.................	»	»	8	1036	129,5
Un mulet attelé au manége et allant au pas.................	30	0,90	8	778	97,25
Un âne attelé au manége et allant au pas....................	»	»	8	322	40,25

REMARQUES. — Les durées de la journée de travail, contenues dans le tableau ci-dessus, sont celles que l'expérience a montré être le plus favorables à la conservation de la santé du moteur, et au maximum du travail journalier qu'il peut produire.

Il résulte du tableau ci-joint que l'homme, par exemple, produit la plus grande quantité de travail alors qu'il élève son propre poids. Il suit de là que la manière la plus utile de l'employer, consiste à le faire monter à une certaine hauteur, et à se servir ensuite de son poids descendant pour faire monter une résistance à peu près égale. Cette manière d'employer la force de l'homme a été mise en pratique par le capitaine du génie Coignet, dans les travaux de terrassement du fort de Vincennes. On fait monter un manœuvre à une échelle, d'où celui-ci passe sur un plateau de balance attaché à une corde qui s'enroule sur une poulie; un second plateau fixé à l'autre bout de la corde élève la résistance. Ce procédé a procuré des économies considérables.

PROPRIÉTÉS DU TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE DES FORCES.

16. Nous avons déjà dit que *pour obtenir le travail élémentaire d'une force, il fallait projeter sur cette force le chemin infiniment petit décrit par son point d'application, et multiplier ensuite cette projection par la force donnée.* Par conséquent, si l'on nomme P la force, ε le chemin, α l'angle que sa direction fait avec celle de la force, le travail de P sera

$$\mathfrak{T}P = P.\varepsilon\cos\alpha = \varepsilon \times P\cos\alpha.$$

Donc *le travail d'une force s'obtiendra encore en projetant la force sur la direction du chemin parcouru, et multipliant ensuite cette projection par ce chemin.*

Si le facteur $P\cos\alpha$ est positif, *la projection de la force tombera sur la direction du chemin parcouru, et le travail sera un travail moteur.*

Si, au contraire, $P\cos\alpha$ est négatif, *la projection de la force tombera sur le prolongement du chemin décrit, et le travail sera un travail résistant.*

Théorème. — *Le travail élémentaire de la résultante de deux forces agissant dans le même plan est égal à la somme des travaux élémentaires des composantes.*

(Dans tout ce qui va suivre, nous regarderons les travaux

moteurs comme positifs, les autres comme négatifs, de sorte que par le mot *somme*, on devra entendre une *somme algébrique*.)

Soient P et Q (*fig.* 22) les deux forces données, R leur résultante, déterminée par la règle du parallélogramme des forces. Projetant les forces sur la direction Ox du chemin parcouru, on a évidemment, en observant que les triangles OBb, ACD sont égaux,

Fig. 22.

$$Oc = Oa + Ob.$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par le chemin ε décrit par le point O, il vient

$$Oc.\varepsilon = Oa.\varepsilon + Ob.\varepsilon.$$

Mais

$$Oc.\varepsilon = \mathfrak{T}R, \quad Oa.\varepsilon = \mathfrak{T}P, \quad Ob.\varepsilon = \mathfrak{T}Q;$$

donc

(1) $$\mathfrak{T}R = \mathfrak{T}P + \mathfrak{T}Q.$$

Supposons maintenant que la projection de l'une des forces Q ou P (*fig.* 23) tombe sur le prolongement Ox : si c'est la projection de Q qui est dans ce cas, on aura

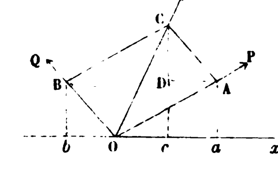


Fig. 23.

$$Oc = Oa - ac = Oa - Ob;$$

multipliant par ε, on a encore

$$Oc.\varepsilon = Oa.\varepsilon - Ob.\varepsilon$$

Mais

$$Oc.\varepsilon = \mathfrak{T}R, \quad Oa.\varepsilon = \mathfrak{T}P, \quad Ob.\varepsilon = -\mathfrak{T}Q;$$

donc l'égalité ci-dessus devient également

$$\mathfrak{T}R = \mathfrak{T}P + \mathfrak{T}Q. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration serait la même si le travail de R était négatif. Par conséquent, l'équation (1) a lieu dans tous les cas, conformément à l'énoncé.



On peut remarquer que l'égalité ci-dessus est encore vraie lorsque ε est une quantité finie; mais cela exige que le chemin décrit par le point d'application de la force soit rectiligne.

On déduit sans peine du théorème précédent que *le moment de la résultante de deux forces agissant dans un même plan est égal à la somme (algébrique) des moments des composantes, le centre des moments étant un point choisi arbitrairement dans le plan des deux forces.* (*Voir* page 6.)

Corollaire. — *Le travail élémentaire de la résultante de tant de forces qu'on voudra agissant sur un même point est égal à la somme (algébrique) des travaux élémentaires des composantes.*

Soient P, P', P'', P''', ... les forces données; nommant R leur résultante, je dis qu'on aura

$$\mathfrak{T}R = \mathfrak{T}P + \mathfrak{T}P' + \mathfrak{T}P'' + \mathfrak{T}P''' + \ldots,$$

ou, d'une manière plus abrégée,

$$\mathfrak{T}R = \Sigma.\mathfrak{T}P.$$

En effet, soit S la résultante des deux premières forces P et P', on aura

$$\mathfrak{T}S = \mathfrak{T}P + \mathfrak{T}P'.$$

Soit S' la résultante de S et de P'', on aura encore

$$\mathfrak{T}S' = \mathfrak{T}S + \mathfrak{T}P'',$$

et ainsi de suite.

Soit enfin R la résultante de S'' et de P''', on obtient

$$\mathfrak{T}R = \mathfrak{T}S' + \mathfrak{T}P'''.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et réduisant, on trouve

$$\mathfrak{T}R = \Sigma.\mathfrak{T}P. \tag{2}$$

C. Q. F. D.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL.

Théorème. — *Lorsqu'un point matériel sollicité par tant de forces qu'on voudra est en équilibre, la somme des travaux élémentaires des forces est nulle.*

Écrivons l'équation du travail sous la forme

$$Rr = \Sigma.Pp.$$

Deux cas peuvent se présenter : ou le point est entièrement libre, ou il est assujetti à rester sur une courbe ou une surface donnée. Dans le premier cas, l'équilibre n'est possible qu'autant qu'on aura $R = 0$; ce qui donne

$$\Sigma.Pp = 0.$$

Dans le second cas, la force doit être normale à la courbe ou à la surface, et comme le mobile ne peut glisser que sur la tangente ou le plan tangent, on aura

$$r = 0, \quad \text{et par suite} \quad \Sigma.Pp = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME. — *Réciproquement, si l'on a $\Sigma.Pp = 0$ pour tous les mouvements infiniment petits que peut prendre le point matériel, les forces qui le sollicitent se feront équilibre.*

En effet, si l'équilibre n'a pas lieu, on pourra toujours appliquer au point donné, en sens inverse du mouvement qu'il prendra sous l'influence des forces, une force R qui le tiendra en équilibre; alors les forces R, P, P', P'', ... se détruisant mutuellement, on aura

$$\Sigma.Pp - Rr = 0.$$

(Je mets le signe — devant Rr, à cause que ce travail est un travail résistant.) Mais, par hypothèse,

$$\Sigma.Pp = 0; \quad \text{donc} \quad Rr = 0.$$

Or, pour que ce produit soit nul, il faut qu'on ait

$$R = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0;$$

et l'on voit que chacune de ces conditions exprime que le point donné ne prendra aucun mouvement. C. Q. F. D.

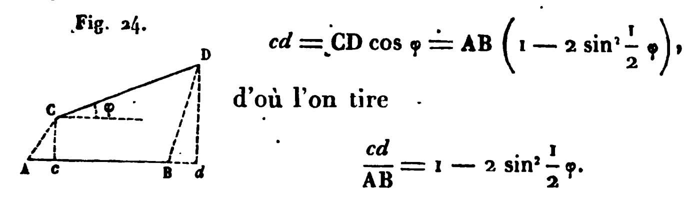
DÉMONSTRATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU TRAVAIL DES FORCES OU DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

17. Proposons-nous maintenant de démontrer l'équation du travail pour un système quelconque de forces en équilibre.

Dans ce but, j'établirai préalablement les théorèmes suivants :

Théorème. — *Quand une droite se déplace infiniment peu sans changer de longueur, si l'on projette sur cette droite les chemins décrits par ses deux extrémités, les deux projections seront égales et de signe contraire (ou, en d'autres termes, l'une des projections tombera sur la droite, l'autre sur son prolongement).*

Nommant φ l'inclinaison de CD sur AB, on a (*fig.* 24)



$$cd = \text{CD} \cos \varphi = \text{AB}\left(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi\right),$$

d'où l'on tire

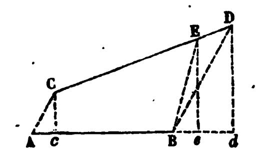
$$\frac{cd}{\text{AB}} = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi.$$

La limite du rapport de cd à AB est donc l'unité. De là on conclut

$$\text{A}c = -\text{B}d. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème. — *Quand une droite change de longueur en se déplaçant infiniment peu, si l'on projette sur cette droite les chemins décrits par ses deux extrémités, l'une des projections, prise avec un signe contraire, est égale à l'autre, augmentée de la variation de longueur de la droite, cette variation étant positive ou négative suivant que la droite dont il s'agit augmente ou diminue de longueur.*

Je suppose, pour fixer les idées, que la droite ait augmenté de longueur, et soit devenue CD (*fig.* 25). Prenant CE = AB, nous aurons, en valeurs absolues, $\text{A}c = \text{B}e$, et en regardant Ac comme positif et Bd comme négatif,



$$-\text{B}d = \text{A}c + ed = \text{A}c + \text{ED}.$$

Il est évident que si le point D tombait à gauche de E, la quantité ED prendrait le signe *moins*, ce qui démontre le théorème énoncé.

Si l'on faisait sur les signes des projections des hypothèses contraires aux précédentes, on aurait

$$\mathrm{B}d = -\mathrm{A}c + \mathrm{ED} = -(\mathrm{A}c - \mathrm{ED}),$$

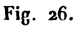
d'où l'on tire

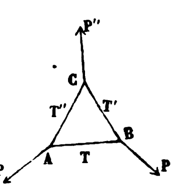
$$-\mathrm{B}d = \mathrm{A}c - \mathrm{ED}.$$

Par conséquent, dans ce cas, *la projection du chemin décrit par l'une des extrémités de la droite mobile, prise avec un signe contraire, est égale à la projection du chemin décrit par l'autre extrémité, diminuée de la variation de longueur de la droite, cette variation de longueur étant positive ou négative dans les mêmes cas que ci-dessus.*

Nous ferons remarquer avant d'aller plus loin que le travail élémentaire $\mathrm{P}p$ d'une force P prendra le signe qui lui convient, en regardant p comme positif ou comme négatif suivant que cette projection tombera sur la direction de la force ou sur son prolongement.

Soient maintenant trois points matériels A, B, C (*fig.* 26), tenus en équilibre par les forces P, P′, P″, et liés entre eux par des droites le long desquelles agiront des réactions attractives ou répulsives T, T′, T″. En ayant égard à ces diverses forces, on pourra regarder chaque point comme entièrement libre, et par suite on aura, en supposant pour généraliser que les diverses droites changent de longueur pendant le déplacement infiniment petit du système :


Fig. 26.

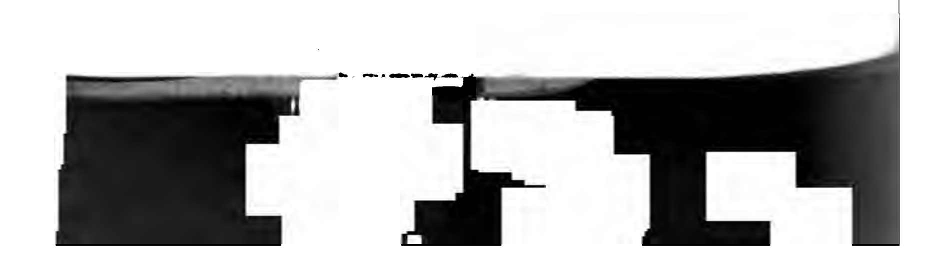


$$\mathrm{P}p + \mathrm{T}t + \mathrm{T}''t'' = 0,$$

$$\mathrm{P}'p' - \mathrm{T}(t \pm \delta.\mathrm{AB}) + \mathrm{T}'t' = 0,$$

$$\mathrm{P}''p'' - \mathrm{T}'(t' \pm \delta.\mathrm{BC}) - \mathrm{T}''(t'' \pm \delta.\mathrm{AC}) = 0.$$

Le signe δ, placé devant une ligne, indique sa variation de longueur; les signes supérieurs répondent au cas d'une réaction attractive, les signes inférieurs au cas d'une réaction ré-

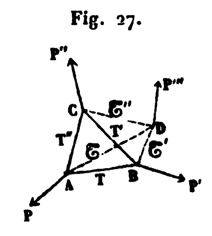


pulsive. Ajoutant ces équations membre à membre, on trouve

$$\Sigma Pp \mp T\delta.AB \mp T'\delta.BC \mp T''\delta.AC = 0.$$

Supposons maintenant un quatrième point D (*fig.* 27) sollicité par une force P''', et lié avec le point A par une ligne matérielle; en nommant ϖ la réaction qui s'exerce le long de cette ligne, la première des équations ci-dessus s'augmentera du terme $\varpi\tau$, et aux équations précédentes s'en joindra une nouvelle,

Fig. 27.



$$P'''p''' - \varpi(\tau \pm \delta.AD) = 0.$$

En ajoutant ces diverses équations, on sera conduit à un résultat analogue au premier. Si le point D est aussi lié au point B, la seconde équation s'augmentera de $\varpi'\tau'$ et la quatrième de $-\varpi'(\tau' \pm \delta.DB)$; enfin si le point D est aussi dépendant du point C, la troisième équation s'augmentera du terme $\varpi''\tau''$, et la quatrième de $-\varpi''(\tau'' \pm \delta.DC)$, de sorte qu'on aura

$$Pp + Tt + T''t'' + \varpi\tau = 0,$$

$$P'p' - T(t \pm \delta.AB) + T't' + \varpi'\tau' = 0,$$

$$P''p'' - T'(t' \pm \delta.BC) - T''(t'' \pm \delta.CA) + \varpi''\tau'' = 0,$$

$$P'''p''' - \varpi(\tau \pm \delta.DA) - \varpi'(\tau' \pm \delta.DB) - \varpi''(\tau'' \pm \delta.DC) = 0.$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, on trouve

$$\Sigma Pp \mp T\delta.AB \mp T'\delta.BC \mp T''\delta.CA \mp \varpi\delta.DA \mp \varpi'\delta.DB \mp \varpi''\delta.DC = 0.$$

En faisant intervenir un cinquième point, on serait évidemment conduit à un résultat analogue, et ainsi de suite.

Donc, si l'on nomme l, l', l'', etc., les droites qui joignent les différents points du système et le long desquelles règnent des réactions, on aura, quel que soit le mode de liaison de ces

points,

$$(3)\qquad \Sigma.\mathrm{P}p \mp \mathrm{T}\delta l \mp \mathrm{T}'\delta l' \mp \mathrm{T}''\delta l'' \mp \ldots = 0,$$

les signes supérieurs répondant à une réaction attractive, les signes inférieurs à une réaction répulsive; et il est bien entendu qu'il n'est nullement nécessaire que chaque point soit sollicité par une force extérieure.

Maintenant si les droites le long desquelles s'exercent des réactions sont inextensibles, comme cela a lieu dans un corps solide (cette hypothèse est permise quand le système est arrivé à l'état d'équilibre), on aura

$$\delta l = 0, \quad \delta l' = 0, \quad \delta l'' = 0 \ldots,$$

et, par suite,

$$\Sigma.\mathrm{P}p = 0,$$

ce qui est l'équation du travail des forces, ou des vitesses virtuelles.

Si quelques-uns des liens physiques sont des fils flexibles, pouvant glisser sans frottement sur leurs appuis, et si les autres liens sont des verges rigides inextensibles, les termes relatifs aux verges rigides disparaîtront de l'équation (3), et il ne restera que ceux relatifs aux liens flexibles.

Si l'on suppose, par exemple, que l, l', l'', ..., soient les côtés d'un même polygone formé par un même fil, on aura

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}' = \mathrm{T}'' = \ldots,$$

et l'équation (1) deviendra

$$\Sigma.\mathrm{P}p - \mathrm{T}(\delta l + \delta l' + \delta l'' + \ldots) = 0.$$

Or, si la longueur totale du fil ne change pas,

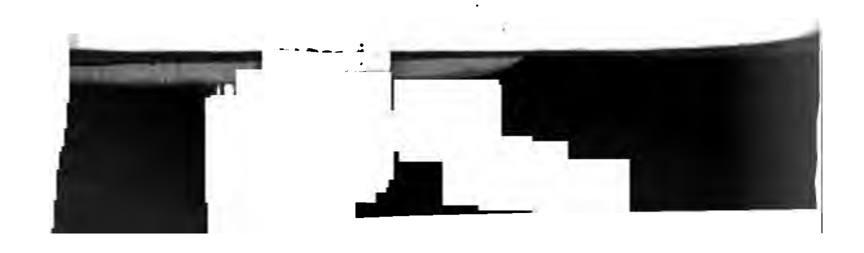
$$\delta l + \delta l' + \delta l'' + \ldots = 0,$$

et il restera simplement

$$\Sigma.\mathrm{P}p = 0.$$

En dehors de ces deux hypothèses, les réactions moléculaires ne disparaîtront pas toutes de l'équation (3).

On peut remarquer que les termes $\mp \mathrm{T}\delta l$, $\mp \mathrm{T}'\delta l'$, etc.,



sont tous des travaux résistants ou négatifs, dans un système matériel dont aucun point n'est libre. En effet, dans le cas d'une attraction entre deux points produite par une traction, δl est positif, et, par suite, $-\mathrm{T}\delta l$ est négatif. Dans le cas d'une répulsion produite par une pression, δl est négatif, et le terme $\mathrm{T}\delta l$ est encore négatif.

INFLUENCE DES CHOCS DANS LES SYSTÈMES MATÉRIELS.

Dans le cas d'un choc entre deux mobiles, les molécules de matière se rapprochent successivement; nommant $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$, etc., les répulsions qui naissent du phénomène et qui s'exercent entre deux molécules, jusqu'à l'instant de la plus grande compression, δx, $\delta x'$, $\delta x''$,..., les variations successives de la distance qui les sépare, la somme des travaux, en ayant égard aux signes des quantités ci-dessus, s'augmentera de l'expression

$$-(\mathfrak{C}\,\delta x + \mathfrak{C}'\,\delta x' + \mathfrak{C}''\,\delta x'' + \ldots).$$

Supposons maintenant que les corps choqués soient doués d'une élasticité parfaite; après l'instant de la plus grande compression, les deux molécules que l'on considère commenceront à s'éloigner, jusqu'à reprendre exactement leur première distance. Pendant ce temps, la réaction, tout en restant répulsive, passera évidemment par les mêmes états de grandeur qu'auparavant, de sorte que la seconde partie du choc introduira dans la somme des travaux une suite de termes tels que

$$+(\mathfrak{C}\,\delta x + \mathfrak{C}'\,\delta x' + \mathfrak{C}''\,\delta x'' + \ldots),$$

et qui détruiront la somme analogue relative à la première partie du choc; d'où il faut conclure que *les chocs entre des corps parfaitement élastiques ne donnent lieu à aucunes pertes de travail.*

Si les corps sont imparfaitement élastiques, les termes de la dernière somme, moins nombreux que ceux de la première, détruiront dans celle-ci un nombre égal de termes, d'où il suit que le choc aura donné lieu à une perte de travail, qui sera d'autant plus grande que les corps seront moins élastiques.

THÉORÈME. — *Réciproquement, si l'équation* $\Sigma.\mathrm{P}p = 0$ *a lieu pour tous les mouvements infiniment petits, compatibles avec la liaison du système, celui-ci sera tenu en équilibre par les forces qui le sollicitent.*

En effet, si l'équilibre n'a pas lieu, on pourra détruire le mouvement de chaque point par une force telle que R, appliquée en sens contraire de la direction de ce mouvement. Il y aura donc équilibre entre les forces P, P', P'',..., et les forces R, R', R''..., appliquées comme il vient d'être dit; et comme ces dernières ne donnent lieu qu'à des travaux résistants, on aura

$$\Sigma.\mathrm{P}p - \mathrm{R}r - \mathrm{R}'r' - \mathrm{R}''r'' - \ldots = 0.$$

Mais, par hypothèse,

$$\Sigma.\mathrm{P}p = 0;$$

donc

$$\mathrm{R}r + \mathrm{R}'r' + \mathrm{R}''r'' + \ldots = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que tous les termes de cette équation sont positifs, on devra avoir

$$\mathrm{R}r = 0, \qquad \mathrm{R}'r' = 0, \qquad \mathrm{R}''r'' = 0, \ldots.$$

Pour satisfaire à chacune de ces équations, à la première par exemple, on devra poser

$$\mathrm{R} = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0;$$

or l'une comme l'autre de ces conditions signifie que le point que l'on considère ne prendra aucun mouvement.

Donc le système sera en équilibre. C. Q. F. D.



CINQUIÈME LEÇON.

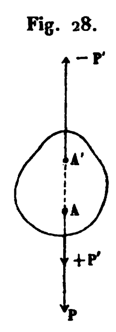
ÉQUILIBRE ET COMPOSITION GÉNÉRALE DES FORCES.

UNE FORCE PEUT ÊTRE APPLIQUÉE EN UN POINT QUELCONQUE DE SA DIRECTION.

18. THÉORÈME. — *Une force peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier par une droite rigide et inextensible.*

Soit P une force appliquée au point A ; je dis qu'on peut la supposer appliquée au point A′ situé sur la direction de P. Au point A′ j'applique deux forces P, — P′ égales à P et directement opposées ; ces deux forces se détruisant, l'état du corps ne sera pas changé. Mais les forces P, — P′ se détruisent aussi, car elles sont appliquées aux deux extrémités d'une droite matérielle inextensible qu'elles tirent en sens contraire : on peut donc les supprimer, et il ne reste plus que la force P′ égale à P, appliquée au point A′. C. Q. F. D.

Fig. 28.



ÉQUILIBRE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

Quand plusieurs forces tendent à faire tourner un corps autour d'un axe fixe, en agissant dans des plans qui lui sont perpendiculaires, il faut et il suffit, pour qu'elles se fassent équilibre, que la somme algébrique de leurs moments, par rapport à cet axe, soit nulle.

Je rappellerai que, pour former cette somme, il faut projeter toutes les forces sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et prendre ensuite les moments par rapport au point où

cet axe perce le plan. La démonstration de ce théorème ayant été donnée dans la première leçon, sa reproduction ici devient inutile.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE ENTIÈREMENT LIBRE.

Soient P, P′, P″,..., tant de forces qu'on voudra appliquées à différents points d'un corps solide entièrement libre. Je décompose la force P en trois autres X, Y, Z parallèles aux trois axes des coordonnées, et l'on aura, en nommant α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes,

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma.$$

Je décompose pareillement la force P′ en trois autres parallèles aux mêmes axes, ce qui donne

$$X' = P'\cos\alpha', \quad Y' = P'\cos\beta', \quad Z' = P'\cos\gamma',$$

et ainsi de suite.

Cela posé, comme pour l'équilibre il faut que la somme des travaux élémentaires des forces soit nulle pour tous les mouvements infiniment petits qu'on fera prendre au mobile, on pourra imprimer successivement à celui-ci un mouvement parallèle à chaque axe, puis un mouvement de rotation autour de chaque axe. Soit δx le chemin infiniment petit décrit parallèlement à l'axe des x par chaque point du corps, δx étant perpendiculaire aux composantes telles que Y, Z; le travail de ces forces sera nul, et l'équation d'équilibre deviendra

$$X\,\delta x + X'\,\delta x + X''\,\delta x + \ldots = 0,$$

ou

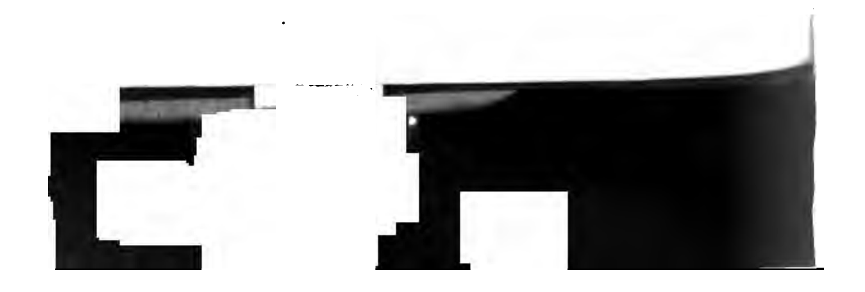
$$(X + X' + X'' + \ldots)\,\delta x = 0.$$

Mais, par hypothèse, δx n'est pas nul, on devra donc avoir

$$X + X' + X'' + \ldots = 0;$$

et, en remplaçant les composantes par leurs valeurs,

$$(1) \qquad P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0.$$



Pour les deux autres axes on aura de même

(2) $$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0,$$

(3) $$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = 0.$$

Faisons maintenant tourner le système autour de l'axe des z.

Nous remarquerons d'abord que le chemin décrit par chaque point du corps étant perpendiculaire aux forces Z, le travail de ces forces sera nul. Observons encore que les composantes X, Y, agissant dans des plans perpendiculaires à l'axe des z, la rotation du mobile autour de cet axe transformera l'équation du travail (ainsi que nous l'avons vu dans la Ire leçon) dans la somme des moments par rapport à cet axe. Pour former l'équation dont il s'agit, il faudra donc projeter les forces X, Y, sur le plan des xy, et prendre ensuite les moments par rapport à l'origine des coordonnées. Soit (*fig.* 29) C la projection du point d'application de la force P; ses composantes se projetteront en CX et CY, et leurs moments seront

Fig. 29.

$$Y.OA = xY, \quad -X.OB = -yX.$$

Nous regardons comme positifs les moments qui tendent à faire tourner de x vers y (ou de gauche à droite, quand on regarde d'un point de l'axe des z), les autres comme négatifs. La somme algébrique de ces deux moments sera donc

$$xY - yX.$$

Les composantes de la force P′ donneront lieu à une somme analogue, savoir

$$x'Y' - y'X',$$

et ainsi de suite; la somme totale des moments étant égalée à zéro, il vient

$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

La rotation autour de l'axe des y donnerait pareillement

$$\Sigma(zX - xZ) = 0.$$

Enfin la rotation autour de l'axe des x donnerait

$$\Sigma(yZ - zY) = 0.$$

Remplaçant dans ces équations X, Y, Z, par leurs valeurs, elles deviennent

$$(4) \qquad \Sigma . P (x \cos\beta - y \cos\alpha) = 0,$$
$$(5) \qquad \Sigma . P (z \cos\alpha - x \cos\gamma) = 0,$$
$$(6) \qquad \Sigma . P (y \cos\gamma - z \cos\beta) = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) conjointement avec celles-ci expriment les conditions analytiques de l'équilibre d'un corps solide entièrement libre, soumis à tant de forces qu'on voudra. En les écrivant toutes ensemble, on aura

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma P \cos\alpha = 0, \\ \Sigma P \cos\beta = 0, \\ \Sigma P \cos\gamma = 0, \\ \Sigma . P (x \cos\beta - y \cos\alpha) = 0, \\ \Sigma . P (z \cos\alpha - x \cos\gamma) = 0, \\ \Sigma . P (y \cos\gamma - z \cos\beta) = 0. \end{array} \right.$$

On pourrait craindre qu'une nouvelle combinaison de mouvements ne donnât lieu à quelque autre équation d'équilibre. Mais on remarquera qu'il ne saurait en être ainsi, attendu que tout mouvement de translation suivant une droite arbitraire peut se remplacer par trois mouvements parallèles aux axes des coordonnées. La même chose a lieu pour un mouvement de rotation.

On peut remarquer que la résultante de deux composantes telles que

$$P \cos\alpha, \quad P \cos\beta$$

est égale à la projection $P \sin\gamma$ de la force P sur le plan des xy. Donc si l'on nomme p la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la direction de cette résultante ainsi projetée, on aura, en vertu du théorème des moments (page 47),

$$Pp \sin\gamma = P (x \cos\beta - y \cos\alpha).$$



Relativement aux autres plans des coordonnées on aura de même

$$Pp' \sin\beta = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma),$$
$$Pp'' \sin\gamma = P(y\cos\gamma - z\cos\beta).$$

Le moment de la force P projetée sur le plan des xy est dit *le moment de la force* P *par rapport à l'axe des* z; de même $Pp' \sin\beta$ est le moment de P par rapport à l'axe des y; enfin $Pp'' \sin\alpha$ est ce moment par rapport à l'axe des x. Les conditions de l'équilibre renfermées dans les équations (7) peuvent donc s'énoncer de la manière suivante :

Pour qu'un corps solide entièrement libre soit tenu en équilibre par tant de forces qu'on voudra, il faut et il suffit : 1° *que la somme des forces décomposées parallèlement à trois axes rectangulaires soit nulle ;* 2° *que la somme de leurs moments relatifs aux mêmes axes soit également nulle.*

Si le mobile n'est pas entièrement libre, le nombre des équations d'équilibre sera égal au nombre des mouvements indépendants qu'on pourra lui imprimer.

Si, par exemple, il est assujetti à tourner autour d'un point fixe, on ne pourra lui imprimer aucun mouvement de translation, et dès lors les trois premières des équations (7) seront inutiles.

Si le corps est assujetti à tourner autour d'un axe fixe, par exemple autour de l'axe des z, on ne pourra lui imprimer qu'un mouvement de rotation autour de cet axe; dès lors il n'y aura qu'une seule équation d'équilibre, savoir la quatrième des équations (7).

ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

Prenons l'axe des z parallèle à la direction commune des forces, nous aurons ainsi

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 0, \qquad \text{ou} \qquad \gamma = 180^\circ;$$

et les équations ci-dessus deviendront, en laissant le signe de

$\cos\gamma$ attaché à la force,

$$(8)\qquad \begin{cases} \Sigma P \quad = 0, \\ \Sigma . P x = 0, \\ \Sigma . P y = 0. \end{cases}$$

Donc, *pour que plusieurs forces parallèles se fassent équilibre, il faut et il suffit:* 1° *que leur somme algébrique soit nulle;* 2° *que la somme de leurs moments, par rapport à deux plans rectangulaires et parallèles aux forces, soit également nulle.*

COMPOSITION GÉNÉRALE DES FORCES.

19. Supposons que les forces qui agissent sur un corps libre ne se fassent pas équilibre, mais se réduisent à une résultante unique R, faisant avec les axes des angles a, b, c. En introduisant la force R dans le système en sens contraire de sa direction, il y aura équilibre entre cette nouvelle force, et les forces données P, P′, P″,...; dans ce cas, les équations (7) deviendront

$$(9)\qquad \begin{cases} R\cos a = \Sigma P\cos\alpha, \\ R\cos b = \Sigma P\cos\beta, \\ R\cos c = \Sigma P\cos\gamma, \\ R(x_1\cos b - y_1\cos a) = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = L, \\ R(z_1\cos a - x_1\cos c) = \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = M, \\ R(y_1\cos c - z_1\cos b) = \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = N. \end{cases}$$

Maintenant, si nous posons, pour abréger,

$$\Sigma P\cos\alpha = X_1,$$
$$\Sigma P\cos\beta = Y_1,$$
$$\Sigma P\cos\gamma = Z_1,$$

les équations ci-dessus prendront la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} R\cos a = X_1, \\ R\cos b = Y_1, \\ R\cos c = Z_1, \\ x_1 Y_1 - y_1 X_1 = L, \\ z_1 X_1 - x_1 Z_1 = M, \\ y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = N. \end{cases}$$



Les trois premières de ces équations feront connaître l'intensité et la direction de la résultante, les trois dernières sa position. En effet, si l'on éleve au carré ces trois premières équations, et qu'ensuite on les ajoute, on aura, en observant que

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1,$$

(11) $$R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2;$$

d'où

$$R = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}.$$

Le radical devra être toujours pris avec le signe +.

La résultante R étant connue, on tirera des mêmes équations

(12) $$\cos a = \frac{X_1}{R}, \quad \cos b = \frac{Y_1}{R}, \quad \cos c = \frac{Z_1}{R},$$

lesquelles feront connaître sa direction (*).

* Remarquons maintenant que deux quelconques des trois dernières équations (10), les deux premières par exemple, représentent l'*équation de la résultante*. Quant à la troisième, si on la remplace par une combinaison des trois; qu'on obtiendra en multipliant chacune d'elles par celle des composantes X_1, Y_1, Z_1 qu'elle ne renferme pas, puis ajoutant, on

(*) La relation

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

se démontre facilement. En effet, considérons une droite d qui, partant de l'origine des coordonnées, fait avec les trois axes des angles a, b, c, et vient aboutir en un point dont les coordonnées sont x, y, z. Cette droite peut être regardée comme étant la diagonale d'un parallélipipède rectangle construit sur les trois arêtes contiguës x, y, z, et dès lors on aura

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Mais

$$x = d\cos a, \quad y = d\cos b, \quad z = d\cos c.$$

Substituant dans d^2, on trouve

$$1 = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

sera conduit à l'équation

$$(13) \qquad LZ_1 + MY_1 + NX_1 = 0,$$

laquelle exprime la condition qui doit être remplie pour que le système des forces se réduise à une résultante unique.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

Si l'on prend pour axe des z une parallèle aux forces données, on aura

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 0, \quad \text{ou} \quad \gamma = 180^\circ,$$

et les équations (9) se réduisent aux suivantes, en laissant le signe de $\cos\gamma$ attaché à la force,

$$\begin{aligned} R\cos a &= 0, \\ R\cos b &= 0, \\ R\cos c &= \Sigma P, \\ Rx_1\cos c &= \Sigma . Px, \\ Ry_1\cos c &= \Sigma . Py. \end{aligned}$$

Maintenant si l'on suppose que le système se réduise à une résultante unique, les deux premières équations donneront

$$\cos a = 0, \quad \cos b = 0,$$

ce qui exige qu'on ait en même temps $\cos c = \pm 1$. Laissant le signe de $\cos c$ attaché à la force, on peut conclure de là que *la résultante de plusieurs forces parallèles est égale à leur somme (algébrique), et parallèle à leur direction commune.*

Quant aux deux dernières équations ci-dessus, elles deviennent

$$x_1 \Sigma P = \Sigma . Px, \quad y_1 \Sigma P = \Sigma . Py.$$

On aura donc à la fois

$$(14) \qquad \begin{cases} R = \Sigma P, \\ x_1 \Sigma P = \Sigma . Px, \\ y_1 \Sigma . P = \Sigma Py; \end{cases}$$



d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma P}.$$

Ces deux valeurs de x_1 et de y_1 feront connaître la position de la résultante. Quant au sens de son action, il sera connu par le signe de $R = \Sigma P$.

Si l'on a

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma . Px = 0, \quad \Sigma . Py > \text{ou} < 0,$$

les valeurs de x_1 et de y_1 deviennent

$$x_1 = \frac{0}{0}, \quad y_1 = \pm \infty,$$

et le système se réduit à un couple dont le bras de levier est perpendiculaire à l'axe des x. L'indétermination de x_1 prouve que ce couple peut être transporté parallèlement à lui-même partout où l'on voudra dans son plan, ou dans un plan parallèle (*).

Si l'on a à la fois

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma . Px = 0, \quad \Sigma . Py = 0,$$

les valeurs de x_1, y_1 seront indéterminées; mais lorsque les équations ci-dessus ont lieu, le système est en équilibre, et dans ce cas on peut, en effet, supposer la résultante appliquée partout où l'on voudra.

PROPRIÉTÉS DES MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES.

Si dans les équations (9) on suppose les forces parallèles, on aura numériquement

$$\cos a = \cos \alpha, \quad \cos b = \cos \beta, \quad \cos c = \cos \gamma,$$

et par suite ces équations deviendront, en faisant sortir du signe Σ la valeur absolue du cosinus (le signe reste ainsi attaché à la force pour indiquer toujours le sens de son

(*) On peut consulter le bel ouvrage de M. Poinsot sur la *Théorie des Couples*.

action),

$$R\cos a = \cos\alpha\,\Sigma P,$$
$$R\cos b = \cos\beta\,\Sigma P,$$
$$R\cos c = \cos\gamma\,\Sigma P,$$
$$\cos b\,(Rx_1 - \Sigma.Px) = \cos a\,(Ry_1 - \Sigma.Py),$$
$$\cos c\,(Ry_1 - \Sigma.Py) = \cos b\,(Rz_1 - \Sigma.Pz),$$
$$\cos a\,(Rz_1 - \Sigma.Pz) = \cos c\,(Rx_1 - \Sigma.Px).$$

Or numériquement on a

$$\cos a = \cos\alpha, \quad \cos b = \cos\beta, \quad \cos c = \cos\gamma,$$

par suite les trois premières équations se réduisent à l'équation unique

$$R = \Sigma P,$$

que nous connaissons déjà.

Quant aux trois dernières, on ne peut y satisfaire, quels que soient a, b, c, qu'en posant

$$(15) \qquad \begin{cases} Rx_1 = \Sigma.Px, \\ Ry_1 = \Sigma.Py, \\ Rz_1 = \Sigma.Pz. \end{cases}$$

Chacune de ces équations prouve que *le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme des moments des composantes par rapport au même plan.*

Si l'on remarque maintenant que les trois équations (15) donnent pour x_1, y_1, z_1, les mêmes valeurs, quels que soient les angles a, b, c, ou, ce qui revient au même, quelle que soit la direction des forces, les points d'application ne changeant pas, on en conclura que, *dans tout système de forces parallèles, il existe un point unique, par lequel passe constamment la direction de la résultante, lorsque, sans changer l'intensité des forces ni leur parallélisme, on fait tourner celles-ci autour de leurs points d'applications.*

Ce point est le *centre des forces parallèles* que nous avons déjà défini dans une précédente leçon.



SIXIÈME LEÇON.

DU CENTRE DE GRAVITÉ ET DE LA FORCE CENTRIFUGE.

FORMULES GÉNÉRALES QUI SERVENT A DÉTERMINER LA POSITION DU CENTRE DE GRAVITÉ.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN ARC DE CERCLE.

20. Considérons un système de corps liés entre eux d'une manière quelconque, dont les poids seront P, P', P'', etc., et dont les centres de gravité supposés connus, auront pour coordonnées, le premier (x, y, z), le deuxième (x', y', z'), etc. La résultante de tous ces poids sera

$$R = \Sigma P.$$

Soient maintenant (x_1, y_1, z_1) les coordonnées du centre de gravité du système; comme les forces P, P', P'', etc., peuvent être supposées appliquées respectivement aux centres de gravité des corps, on aura, par les propriétés des moments (*voir* la leçon V),

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 \Sigma P = \Sigma P x, \\ y_1 \Sigma P = \Sigma P y, \\ z_1 \Sigma P = \Sigma P z, \end{cases}$$

et ces trois équations détermineront x_1, y_1, z_1.

Maintenant soient m, m', m'', m''', etc., les masses des différents corps, on aura

$$P = mg, \quad P' = m'g, \quad P'' = m''g, \ldots,$$

et les équations ci-dessus deviendront

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 \Sigma m = \Sigma m x, \\ y_1 \Sigma m = \Sigma m y, \\ z_1 \Sigma m = \Sigma m z. \end{cases}$$

* CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS SOLIDE.

Soit m la masse totale du solide, dm celle d'une molécule, x, y, z ses coordonnées, on aura, pour résoudre le problème proposé, les trois équations

$$(3) \qquad \begin{cases} mx_1 = \int xdm, \\ my_1 = \int ydm, \\ mz_1 = \int zdm, \end{cases}$$

le signe intégral devant s'étendre à la masse entière du corps.

* CENTRE DE GRAVITÉ D'UN VOLUME.

Pour un volume, on aura pareillement

$$(4) \qquad \begin{cases} Vx_1 = \int xdv, \\ Vy_1 = \int ydv, \\ Vz_1 = \int zdv. \end{cases}$$

En effet, nommons ϖ le poids de l'unité de volume, et p le poids de l'élément différentiel dv, on aura, en nommant P le poids total,

$$P = V\varpi, \quad p = \varpi dv,$$

et ensuite par les propriétés des moments,

$$\begin{cases} Px_1 = \int px, \\ Py_1 = \int py, \\ Pz_1 = \int pz. \end{cases}$$

Remplaçant P et p par leurs valeurs ci-dessus, et supprimant le facteur commun ϖ, on obtient les équations (4).

* CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE SURFACE.

Si l'on nomme ω cette surface, et $d\omega$ l'élément différentiel, on aura, pour déterminer le centre de gravité,

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega x_1 = \int xd\omega, \\ \omega y_1 = \int yd\omega, \\ \omega z_1 = \int zd\omega. \end{cases}$$




* CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE AIRE PLANE COMPRISE ENTRE DEUX ORDONNÉES.

Si l'on considère un élément compris entre deux ordonnées infiniment voisines y et $y+dy$, distantes de la quantité dx, on pourra regarder ab (*fig.* 30) comme un filet rectiligne, lequel aura évidemment pour centre de gravité son milieu, et l'on aura, en adoptant les mêmes notations que ci-dessus,

Fig. 30.

$$(6)\qquad \begin{cases} \omega x_1 = \int xy\,dx, \\ \omega y_1 = \frac{1}{2}\int y^2 dx. \end{cases}$$

Ces intégrales devront être prises depuis $x = \text{OP}$ jusqu'à $x = \text{OP}'$.

* CENTRE DE GRAVITÉ D'UN ARC DE COURBE.

Soient s la longueur de l'arc de courbe, ds un élément infiniment petit ayant pour coordonnées x, y, z, on aura par les mêmes raisons que précédemment,

$$(7)\qquad \begin{cases} sx_1 = \int x ds, \\ sy_1 = \int y ds, \\ sz_1 = \int z ds. \end{cases}$$

De sorte que la détermination du centre de gravité est généralement une question de calcul intégral.

* CENTRE DE GRAVITÉ D'UN ARC DE CERCLE.

Pour donner un exemple de la détermination d'un centre de gravité, nous appliquerons les formules précédentes à l'arc de cercle. Comme ici la courbe donnée est plane, et que d'ailleurs le centre de gravité est sur le rayon qui partage l'arc en deux parties égales, nous aurons simplement, en prenant ce rayon pour axe des x,

$$sx_1 = \int x ds.$$

Remplaçant ds par sa valeur $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$, il vient

$$sx_1 = \int x dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Cela posé, on tire de l'équation du cercle,

$$y dy + x dx = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

et en substituant,

$$sx_1 = \int x dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}};$$

remplaçant y par sa valeur en fonction de x, on trouve

(8) $$sx_1 = 2R \int \frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = Rc,$$

en nommant c la corde de l'arc.

Si l'on a

$$s = \pi R, \quad c = 2R,$$

la valeur de x_1 devient

(9) $$x_1 = \frac{2R}{\pi}.$$

APPLICATIONS DU PRINCIPE DES MOMENTS.

21. Dans ce numéro nous allons donner trois applications importantes du principe des moments :

La première sera relative au travail de la pesanteur ;

La deuxième, à la pression d'un liquide sur une surface plane inclinée ;

La troisième, au calcul de la force centrifuge.

DÉTERMINATION DU TRAVAIL DE LA PESANTEUR.

Concevons un système de points matériels liés entre eux d'une manière quelconque, et se transportant d'une position à une autre, puis concevons un plan horizontal mené au-dessus de tout le système. Si l'on nomme z_0, z'_0, z''_0, etc., les distances au plan donné de ces divers points dans leur posi-



tion initiale, et z, z', z'', etc., les distances analogues qui répondent à la position finale, le travail résultant des poids de ces divers points matériels sera

$$T = P(z - z_0) + P'(z' - z'_0) + P''(z'' - z''_0) + \ldots,$$

et ces travaux seront des travaux moteurs ou résistants suivant que les différences $z - z_0$, $z' - z'_0$, $z'' - z''_0$, etc., seront positives ou négatives, ou suivant que les mobiles descendront ou monteront.

Développant l'égalité précédente, il vient

$$T = Pz + P'z' + P''z'' = \ldots - (Pz_0 + P'z'_0 + P''z'_0 + \ldots).$$

Soient maintenant ϖ la somme des poids, et Z_0, Z_1 les distances au plan donné du centre de gravité du système dans ses deux positions extrêmes, on aura

$$\varpi Z_0 = Pz_0 + P'z'_0 + P''z''_0 + \ldots,$$
$$\varpi Z_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans celle de T, il vient

(10) $$T = \varpi Z_1 - \varpi Z_0 = \varpi(Z_1 - Z_0).$$

Ce qui fait voir que *la différence entre la somme des travaux moteurs et celle des travaux résistants dus aux actions de la pesanteur est la même que si toute la masse du système était concentrée au centre de gravité.*

De là il résulte que *lorsqu'un corps solide, animé d'un mouvement quelconque, passe d'une position à une autre, la somme de travaux moteurs moins celle des travaux résistants, dus aux actions de la pesanteur sur ses diverses molécules, est égale au poids du corps multiplié par la distance verticale parcourue par le centre de gravité.*

Il résulte encore de ce qui précède que *dans tout système de corps liés entre eux d'une manière quelconque, par exemple dans une machine, la somme des travaux moteurs moins la somme des travaux résistants, dus aux actions de la pesanteur, est la même que si toute la masse du système était*

concentrée au centre de gravité. Donc, si le centre de gravité s'abaisse, le travail résultant sera un travail moteur; s'il s'élève, un travail résistant. *Et si l'on estime le travail pour une période au bout de laquelle le centre de gravité se retrouve à la même place, le travail résultant sera nul.*

CALCUL DE LA PRESSION D'UN LIQUIDE SUR UNE SURFACE PLANE INCLINÉE.

On démontre en physique que *dans un liquide en équilibre, la pression est la même autour de chaque point*. En second lieu *que la pression exercée sur une surface horizontale plongée dans le liquide a pour mesure le poids d'une colonne du liquide qui aurait pour base cette surface, et pour hauteur sa distance au niveau. Donc aussi sur toute surface plane infiniment petite, mais inclinée, la pression se mesurera de la même manière.*

Cela posé, soit ω un élément plan, infiniment petit, de la surface donnée; la pression qui s'exerce sur cet élément aura pour mesure $k\omega z$, en désignant par z la distance au niveau du liquide de l'élément superficiel ω, et par k le poids du liquide sous l'unité de volume. Pour un second élément ω' distant du niveau de la quantité z', la pression sera $k\omega' z'$, et ainsi de suite. La pression totale, que je nommerai P, aura donc pour valeur

$$P = k\omega z + k\omega' z' + k\omega'' z'' + \ldots,$$

et en mettant k en facteur commun,

$$P = k(\omega z + \omega' z' + \omega'' z'' + \ldots).$$

Soient maintenant a l'aire de la surface proposée, et z_1 la distance de son centre de gravité au niveau du liquide, on aura par les propriétés des moments,

$$az_1 = \omega z + \omega' z' + \omega'' z'' + \ldots;$$

substituant dans la valeur précédente de P, on trouve

$$(11) \qquad P = kaz_1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$





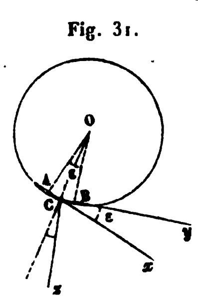
Ce qui démontre que *la pression exercée sur une surface inclinée, plongée dans un liquide, a pour mesure le poids d'une colonne de liquide qui aurait pour base cette surface, et pour hauteur la distance de son centre de gravité au niveau.*

Ce théorème servira à calculer la pression supportée, soit par une vanne, soit par une écluse, etc., et à donner ainsi à chaque barrage le degré de résistance qui lui convient.

MESURE DE LA FORCE CENTRIFUGE SUR UN POINT MATÉRIEL.

Concevons un point matériel décrivant une circonférence de cercle. Arrivé au point C (*fig.* 31) avec la vitesse v, ce point continuerait à se mouvoir suivant l'élément Cx, si la courbe et les forces accélératrices cessaient tout à coup d'exister. Soient A et B les points milieux des deux éléments consécutifs, posons $AB = s$, et nommons t le temps infiniment petit employé à décrire l'arc s; pendant ce temps t nous pourrons faire abstraction des forces accélératrices qui ne peuvent faire varier la vitesse que d'une quantité infiniment petite; il sera donc permis de regarder le mouvement comme uniforme pendant tout le parcours de l'arc AB, de sorte qu'on aura

Fig. 31.



$$s = vt.$$

Mais puisque le mobile est dévié de l'élément AC sur l'élément BC, il faut en conclure que la courbe fait sur le point C l'effet d'une force qui tendrait à le rapprocher du centre O. Or, l'action étant toujours égale à la réaction, il faut que le point matériel exerce à son tour sur la courbe une pression égale et contraire; c'est cette pression qui a reçu le nom de *force centrifuge*.

Pour l'évaluer, je mène les rayons OA, OB, OC, ainsi que la ligne Cz, perpendiculaire à Cy, et je remarque que les deux angles marqués ε sont égaux; de plus, comme $s = R\varepsilon$, il en

résulte

(12) $$\varepsilon = \frac{s}{R}.$$

Je décompose maintenant la vitesse v en deux autres dirigées suivant Cy et Cz ; ses composantes auront pour valeurs

Suivant Cy...... $v \cos \varepsilon$,

Suivant Cz...... $v \sin \varepsilon = v\varepsilon$.

La réaction que développe la courbe et qui est égale et contraire à la force centrifuge f, aura donc pour effet de détruire la composante $v\varepsilon$; par suite elle aura pour mesure (*voir* page 20)

$$f = \frac{mv\varepsilon}{t}.$$

Remplaçant ε par sa valeur (12), on obtient

$$f = \frac{mvs}{Rt}.$$

Mais $s = vt$, donc finalement

(13) $$f = \frac{mv^2}{R}.$$

Telle est l'expression de la force centrifuge.

Si l'on nomme ω la vitesse angulaire de rotation, la valeur de v deviendra

$$v = \omega R,$$

et par suite on aura

(14) $$f = m\omega^2 R.$$

Considérons par exemple un point matériel pesant 10^k, attaché à un fil long de 3^m, et tournant autour d'un axe avec une vitesse de 100 tours par minute. Dans ce cas, on aura

$$m = \frac{10^k}{9,808} = 1,019, \quad \text{et} \quad \omega.60 = 2\pi.100,$$

d'où

$$\omega = 10,472,$$

par suite

$$f = 335^k,24.$$



Quand le mobile décrit une courbe quelconque, on peut le regarder comme tournant à chaque instant autour d'un axe instantané de rotation, mené par le centre de courbure, perpendiculairement au plan osculateur. Dès lors les formules ci-dessus s'appliquent à tous les cas.

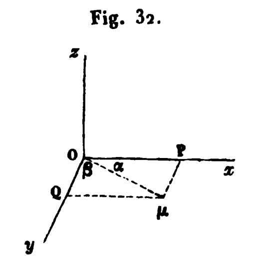
RÉSULTANTE DES ACTIONS DE LA FORCE CENTRIFUGE SUR UN CORPS DE FORME QUELCONQUE, HOMOGÈNE OU HÉTÉROGÈNE.

Le calcul de la force centrifuge sur un corps de grandeur finie a été jusqu'à présent une question de calcul intégral. Le théorème suivant, auquel j'ai été conduit en étudiant la théorie du pendule conique, lève toutes les difficultés, en faisant descendre la détermination de cette force dans le domaine des faits pratiques.

THÉORÈME. — *La résultante des actions de la force centrifuge sur un corps de forme quelconque, homogène ou hétérogène, tournant autour d'un axe (fixe ou instantané), est la même, en grandeur, que si toute la masse du mobile était concentrée en un point quelconque d'une ligne menée par le centre de gravité, parallèlement à l'axe de rotation.*

Soient Ox, Oy, Oz (*fig.* 32) trois axes rectangulaires dont l'un Oz sera l'axe de rotation, à l'instant où l'on se propose de calculer la force centrifuge. M étant la masse du corps, m la masse d'une de ses molécules, μ la projection de m sur le plan des x, y, la force centrifuge qui agit sur m aura pour valeur, en nommant ω la vitesse angulaire de rotation,

Fig. 32.



(15) $$f = \omega^2 m . O\mu.$$

Les composantes de cette force par rapport aux trois axes des coordonnées seront :

$$\begin{cases} f_x = \omega^2 m . O\mu . \cos\alpha, \\ f_y = \omega^2 m . O\mu . \cos\beta, \\ f_z = 0. \end{cases}$$

Mais si l'on désigne par x, y, z, les coordonnées de m, on aura

$$x = \text{O}\mu.\cos\alpha, \quad y = \text{O}\mu.\cos\beta;$$

par suite les composantes de f deviendront

$$(16) \qquad \begin{cases} f_x = \omega^2 mx, \\ f_y = \omega^2 my, \\ f_z = 0. \end{cases}$$

Soit F la résultante des forces telles que f, on aura pour ses composantes,

$$\text{F}_x = \omega^2 \Sigma . mx,$$
$$\text{F}_y = \omega^2 \Sigma . my,$$
$$\text{F}_z = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les points de la masse du mobile. Nommant encore a, b, c, les coordonnées du centre de gravité, les propriétés des moments donnent

$$\text{M}a = \Sigma . mx, \quad \text{M}b = \Sigma . my;$$

alors les composantes de F deviennent

$$(17) \qquad \begin{cases} \text{F}_x = \omega^2 \text{M}a, \\ \text{F}_y = \omega^2 \text{M}b, \\ \text{F}_z = 0; \end{cases}$$

d'où l'on tire, en élevant au carré, ajoutant, puis extrayant la racine carrée,

$$(18) \qquad \text{F} = \omega^2 \text{M} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

Si l'on pose

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

qu'on nomme P le poids de la masse M, et N le nombre de tours par minute, on aura

$$\omega . 60^s = 2\pi \text{N}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{\pi \text{N}}{30},$$





et la formule (18) deviendra

$$F = \frac{\pi^2 N^2 P r}{900 g}. \tag{19}$$

* Recherchons maintenant la position de la résultante. Nous rappellerons que pour un système de forces telles que X, Y, Z, dont la résultante a pour composantes X_1, Y_1, Z_1, et pour coordonnées courantes x_1, y_1, z_1, on a généralement (*voir* n° 19)

$$x_1 Y_1 - y_1 X_1 = \Sigma(x Y - y X),$$
$$z_1 X_1 - x_1 Z_1 = \Sigma(z X - x Z),$$
$$y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = \Sigma(y Z - z Y).$$

Mais dans le cas actuel,

$$X = \omega^2 x dm, \quad Y = \omega^2 y dm, \quad Z = 0,$$
$$X_1 = \omega^2 m a, \quad Y_1 = \omega^2 m b, \quad Z_1 = 0,$$

en désignant maintenant la masse du corps par m, et par dm celle d'une molécule.

Conséquemment les équations ci-dessus deviennent

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & a y_1 - b x_1 = 0, \\ & m a z_1 = \int x z dm, \\ & m b z_1 = \int z y dm. \end{aligned} \right.$$

La résultante des forces centrifuges aura pour équation la première des équations ci-dessus, conjointement avec l'une quelconque des deux autres. Quant aux deux dernières, leur combinaison conduit à l'équation

$$a \int z y dm - b \int x z dm = 0, \tag{21}$$

laquelle exprime la condition qui doit être remplie pour que le système des forces se réduise à une résultante unique.

Il suit de l'équation de la résultante que cette force coupe la parallèle à l'axe de rotation, menée par le centre de gravité, en un point tel, qu'on a

$$z_1 = \frac{1}{ma} \int x z dm.$$

Rapportant x, y, z au centre de gravité, et nommant x', y', z', les nouvelles coordonnées, la valeur de z devient

$$z_1 = c + \frac{1}{ma} \int x' z' \, dm;$$

d'où l'on voit que *la résultante des actions centrifuges passera par le centre de gravite du mobile, toutes les fois qu'on aura*

$$\int x' z' \, dm = 0.$$

Ce qui aura lieu, par exemple, dans le cas particulier où la parallèle à l'axe de rotation menée par le centre de gravité sera l'un des axes principaux du corps.

Si la parallèle à l'axe de rotation menée par le centre de gravité est un axe principal, on pourra prendre pour axes des Ox, Oy, des parallèles aux deux autres axes principaux Ox', Oy'; on aura dans ce cas

$$\int x' y' \, dm = 0, \quad \int x' z' \, dm = 0, \quad \int y' z' \, dm = 0;$$

il en résultera

$$\int xy dm = mab, \quad \int xz dm = mac, \quad \int yz dm = mbc,$$

et l'on peut s'assurer que dans ce cas l'équation de condition (21) se trouve satisfaite.

Nous renvoyons pour ce dernier article à la théorie des axes principaux de rotation qu'on trouvera exposée dans tous les Traités de Mécanique rationnelle.

FORCE CENTRIFUGE SUR LA DEMI-JANTE D'UN VOLANT.

Nous supposons la jante du volant terminée par deux surfaces cylindriques dont la distance est e. M étant la masse de la demi-jante, r la distance de son centre de gravité au centre du volant, ω la vitesse angulaire de rotation, la force centrifuge aura pour valeur

$$F = M\omega^2 r.$$

Mais si l'on nomme R le rayon moyen de la jante, on aura

$$r = \frac{2}{\pi} R + \frac{1}{6.\pi} \frac{e^2}{R},$$



par suite la valeur de F devient, en nommant P le poids total de la jante, N le nombre de tours par minute, et nous rappelant que $\omega = \frac{\pi N}{30}$

$$F = \frac{\pi N^2 P}{900\, g}\left(R + \frac{1}{12}\frac{e^2}{R}\right). \qquad (22)$$

Le second terme n'ayant qu'une importance secondaire pourra être négligé dans la plupart des cas.

Pour donner une application numérique de cette formule, supposons

$$P = 12000^k, \quad R = 2^m,50, \quad e = 0^m,70, \quad n = 40,$$

et l'on trouve successivement pour les deux termes de la formule,

1er terme. .	$17083^k,2$
2e terme...	$111^k,6$
d'où.......	$F = 17194^k,8$

La force centrifuge sur l'autre demi-jante a aussi pour valeur

$$F = 17194^k,8.$$

Cette force tend évidemment à rompre le volant par le milieu. Il est clair que la roue proposée est dans le même cas que si elle était suspendue par sa circonférence, et qu'elle fût chargée, en bas, d'un poids égal à $17194^k,8$.

Prenons pour second exemple

$$P = 10000^k, \quad R = 3^m,07, \quad e = 0^m,26, \quad N = 16,$$

et l'on trouve

$$\left.\begin{array}{ll}1^{er}\text{ terme...} & 2797^k,0\\ 2^e\text{ terme...} & 1^k,6\end{array}\right\}\text{ d'où } F = 2798^k,6 \quad (*).$$

. premier des exemples qui précèdent est purement fictif; le

(*) Les tourillons de ce dernier volant ayant 15 centimètres de diamètre, la formule (9) du nº 13 donne, pour le travail absorbé par les frottements dus au poids de la roue, et en prenant $f = 0,12$,

$$T = 150^{km},79 = 2^{ch},01.$$

second se rapporte au volant de la machine oscillante de M. Descat, rue de Béthune, qui a bien voulu nous laisser visiter ses beaux ateliers de teinturerie avec les élèves de la Faculté.

On voit par ce qui précède qu'il importe de régler les dimensions et la vitesse des volants, de telle sorte que la force centrifuge ne dépasse pas certaines limites (*). L'action de la force centrifuge sur une portion quelconque de la jante, répondant à un arc a de la circonférence moyenne, se calcule sans difficulté. En effet, soit c la corde de l'arc, on aura d'abord en adoptant la même notation que ci-dessus,

$$r = \frac{c}{a}\left(\mathrm{R} + \frac{1}{12}\frac{e^2}{\mathrm{R}}\right),$$

et ensuite

$$(23) \qquad \mathrm{F} = \frac{1}{2}\frac{\pi \mathrm{N}^2 \mathrm{P} c}{900 g}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{e^2}{\mathrm{R}^2}\right),$$

dans laquelle P désigne le poids de toute la jante. Cette formule devient la formule (22), si l'on y fait

$$c = 2\mathrm{R}.$$

CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES LES PLUS SIMPLES.

22. Quoique la détermination générale du centre de gravité soit du ressort du calcul intégral, cependant on peut, dans un grand nombre de cas, obtenir très-aisément la position de ce point, soit à la seule inspection de la figure, soit par des considérations géométriques très-simples.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE LIGNE DROITE.

Ainsi, par exemple, il est évident que le centre de gravité d'une ligne droite est en son milieu.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CERCLE.

Le centre de gravité d'un cercle ou de sa circonférence est situé au centre.

(*) *Voir* notre Mémoire sur la rupture des roues, inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 9 février 1857.



CENTRE DE GRAVITÉ D'UN PARALLÉLOGRAMME.

Pareillement, le centre de gravité d'un parallélogramme est situé au centre de figure.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CYLINDRE.

De même, le centre de gravité d'un cylindre homogène, ou composé de sections droites homogènes et symétriques par rapport à la section moyenne, est situé au milieu de l'axe.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE SPHÈRE.

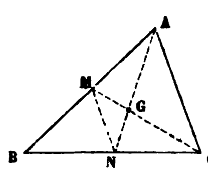
Le centre de gravité d'une sphère est situé au centre, si la sphère est homogène, ou composée de couches concentriques homogènes.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRIANGLE.

THÉORÈME. — *Le centre de gravité d'un triangle est situé sur la ligne qui va d'un sommet au milieu du côté opposé pris pour base, au tiers de cette ligne à partir de la base ou aux deux tiers à partir du sommet.*

Soit BAC le triangle proposé; si je le décompose en petites bandes infiniment étroites et parallèles à BC, le centre de gravité de chacune sera situé en son milieu. Maintenant si l'on joint le point A au milieu N de BC, la ligne ainsi menée passera par le milieu de chacune des bandes, et par conséquent contiendra le centre de gravité du triangle. Par la même raison, si l'on joint le sommet C avec le milieu M de AB, la ligne CM contiendra encore le centre de gravité; le point cherché sera donc au point G.

Fig. 33.



Tirons maintenant MN; cette ligne partageant proportionnellement les côtés BA, BC, est parallèle à AC, et l'on a

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}.$$

Mais BM est la moitié de BA, donc aussi MN est la moitié de

AC. Comparant encore les triangles MNG, ACG qui sont semblables, on a

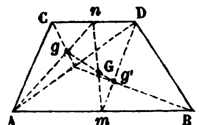
$$\frac{NG}{AG} = \frac{MN}{AC}.$$

Mais MN est la moitié de AC; donc aussi NG est la moitié de AG, ou, en d'autres termes, NG est le tiers de AN. C. Q. F. D.

CENTRE DE GRAVITÉ DU TRAPÈZE.

Soit ABCD (*fig.* 34) le trapèze donné; nous nous proposons de *trouver son centre de gravité par des procédés purement graphiques.*

Fig. 34.



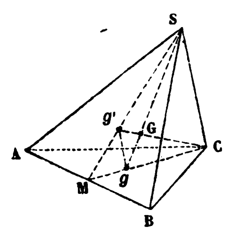
Si l'on joint par une droite les milieux des bases parallèles, la ligne ainsi menée contiendra évidemment le centre de gravité. (On le prouverait en décomposant la figure en bandes infiniment étroites et parallèles à AB). Je tire maintenant la diagonale AD, et je cherche les centres de gravité g, g' des triangles ACD, ABD; tirant ensuite gg', cette ligne contiendra encore le centre de gravité du trapèze. Ce point sera donc au point G d'intersection de ces deux lignes.

Le centre de gravité d'un polygone quelconque se déterminerait par des constructions analogues, seulement l'opération se complique beaucoup à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE PYRAMIDE TRIANGULAIRE.

Soit proposé de trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire SABC (*fig.* 35). Pour cela, je joins le point C avec le milieu du côté AB; en prenant $Mg = \frac{1}{3}CM$, le point g sera le centre de gravité de la base. Joignant maintenant le sommet S au point g, cette ligne contiendra le centre de gravité de la pyramide, car elle passera évidemment par les centres de gravité de toutes les tranches infiniment minces,

Fig. 35.





parallèles à la base, et dans lesquelles on peut concevoir la pyramide décomposée. Pareillement, si l'on joint le sommet C avec le centre de gravité g' de la face opposée SAB, on aura une nouvelle ligne contenant le centre de gravité. Le point cherché sera donc au point G d'intersection. (On peut remarquer que les lignes Sg, Cg' sont toutes deux dans le plan du triangle SCM.) Je dis maintenant que Gg est le quart de Sg. En effet, puisque Mg est le tiers de CM, et Mg' le tiers de SM, il en résulte que gg' divise proportionnellement les côtés CM, SM du triangle SCM; donc le triangle Mgg' est semblable à SCM; de là il suit que gg' est le tiers de SC. Mais les triangles Ggg', SCG sont semblables, alors on a

$$\frac{Gg}{SG} = \frac{gg'}{SC}.$$

Mais

$$gg' = \frac{1}{3}SC; \qquad \text{donc aussi} \qquad Gg = \frac{1}{3}SG,$$

et enfin

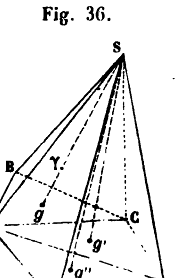
$$Gg = \frac{1}{4}Sg. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Par conséquent *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est situé sur la ligne qui va d'un sommet au centre de gravité de la face opposée, prise pour base, au quart de cette ligne à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet.*

CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE PYRAMIDE QUELCONQUE.

Pour trouver le centre de gravité de la pyramide SABCDE (*fig.* 36), je décompose la base en triangles, et je fais remarquer qu'à chaque triangle répond une pyramide triangulaire. Cela posé, je joins le sommet S avec chacun des centres de gravité g, g', g'', des triangles de la base, et si je prends $S\gamma = \frac{1}{4}Sg$, γ sera le centre de gravité de la pyramide triangu-

Fig. 36.



laire SABC. J'imagine maintenant qu'on ait mené, par le point γ, un plan parallèle à la base; ce plan détachera le quart de chacune des autres lignes Sg', Sg''; par conséquent il passera par les centres de gravité de toutes les pyramides triangulaires, et, par suite, il contiendra le centre de gravité de la pyramide totale. Mais le centre de gravité de cette pyramide se trouve aussi sur la ligne qui va du sommet au centre de gravité du polygone de base; donc il est situé à l'intersection des deux.

Donc *le centre de gravité d'une pyramide quelconque est situé sur la ligne qui va du sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet.*

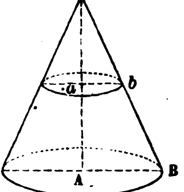
CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CONE.

Le cône (de révolution) pouvant être assimilé à une pyramide régulière dont les faces latérales seraient infiniment petites, il en résulte que *le centre de gravité du cône s'obtiendra comme celui de la pyramide.*

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRONC DE CONE.

Posons, pour abréger, $Aa = H$, $AB = R$, $ab = r$ (*fig.* 37).

Fig. 37.



Nommons aussi P et y le volume et la hauteur du cône SAB; la hauteur du petit cône sera $y - H$, et en désignant par p son volume, on aura

$$(24) \qquad \frac{y}{y - H} = \frac{R}{r}, \quad \frac{P}{p} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Remarquons maintenant que si l'on prend les moments par rapport à la base AB du tronc, ces moments auront pour valeurs

pour le cône SAB..... $P\dfrac{y}{4}$,

pour le cône Sab..... $p\left(\dfrac{y - H}{4} + H\right) = p\left(\dfrac{y + 3H}{4}\right)$,

pour le tronc $ABab$...$(P - p)\,u$,

u étant la distance à la base AB du centre de gravité du tronc.



Cela posé, l'équation des moments donne

$$P\frac{y}{4} = p\frac{y+3H}{4} + (P-p)u,$$

et, en chassant le dénominateur,

$$Py = py + 3Hp + 4(P-p)u,$$

d'où

$$u = \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}H\frac{p}{P-p}.$$

Mais on tire des équations (24)

$$y = \frac{RH}{R-r}, \quad \frac{p}{P-p} = \frac{r^3}{R^3-r^3}.$$

Substituant, la valeur de u devient

(25) $$u = \frac{1}{4}H\left(\frac{R}{R-r} - 3\frac{r^3}{R^3-r^3}\right);$$

réduisant au même dénominateur, puis divisant les deux termes de la fraction résultante par $(R-r)$, on trouve la nouvelle formule

(26) $$u = \frac{1}{4}H\frac{(R+r)^2+2r^2}{(R+r)^2-Rr},$$

laquelle se prête mieux aux méthodes de calcul.

Telle est la formule qui fera connaître la position du centre de gravité du tronc de cône.

Si, par exemple, on suppose

$$H = 1^m, \quad R = 0^m,40, \quad r = 0^m,30,$$

on trouve

$$u = 0^m,453.$$

SEPTIÈME LEÇON.

DES LEVIERS.

DÉFINITIONS DES MACHINES SIMPLES ET COMPOSÉES.

23. *Les machines sont des instruments destinés à transmettre le travail des forces.* Elles se divisent en machines simples et en machines composées.

Les machines simples sont celles qui ne sont formées que d'un seul corps solide; elles sont au nombre de trois :

Le levier,

Le plan incliné,

Le tour ou treuil.

Les machines composées sont des combinaisons des machines simples.

MOUVEMENT UNIFORME DES MACHINES.

Lorsqu'un système matériel est sollicité par des forces qui ne se font pas équilibre, celui-ci prendra évidemment un mouvement varié, d'où il suit que : *Si un système se meut d'un mouvement uniforme, les forces qui le sollicitent se feront équilibre. Par conséquent les équations d'équilibre d'une machine exprimeront les conditions qui doivent être remplies pour que son mouvement soit uniforme.*

Pour montrer par un exemple l'utilité de ces équations, reprenons le cas du plan incliné traité dans la première leçon. Nous avons vu que pour qu'une force P parallèle au plan tienne en équilibre un poids Q posé sur ce plan (*fig.* 4), il faut et il suffit qu'on ait la relation (nous faisons abstraction du frottement)

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{l}, \quad \text{d'où} \quad P = Q\frac{h}{l},$$

h et l étant la hauteur et la longueur du plan.



Maintenant, si la force P est capable de faire remonter le poids Q d'un mouvement uniforme, la relation ci-dessus aura lieu pendant toute la durée du mouvement, et l'équation $P = Q\frac{h}{l}$ permettra de calculer la force qui sera nécessaire pour entretenir le mouvement uniforme de la résistance Q. Si, par exemple,

$$h = 1^{m}, \quad l = 5^{m}, \quad Q = 1500^{k},$$

la valeur de P sera

$$P = 300^{k}.$$

Ainsi un poids de 300 kilogrammes, disposé comme dans la figure suivante, suffira pour faire remonter d'un mouvement uniforme, le long du plan incliné, un poids de 1500 kilogrammes; mais il doit être entendu que le poids proposé ne pourra être mis en mouvement que par l'emploi momentané d'un surcroît de force.

Dans la question que nous venons de traiter, nous n'avons pas tenu compte du frottement, mais il serait aisé d'y avoir égard. Pour cela, je décompose la force Q (*fig.* 38) en deux autres, l'une N normale au plan, dirigée suivant GN, l'autre S parallèle au plan, dirigée suivant GS; le frottement étant proportionnel à la pression aura pour valeur fN, de sorte qu'on aura, pour l'équilibre,

Fig, 38.

$$P = S + fN.$$

Or

$$S = Q \sin \alpha, \quad N = Q \cos \alpha;$$

par suite

$$P = Q \sin \alpha + f Q \cos \alpha.$$

Mais on tire des dimensions du plan incliné,

$$h = l \sin \alpha, \quad b = l \cos \alpha;$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{h}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{l};$$

alors, par la substitution de ces valeurs, l'équation d'équilibre devient

$$(1) \qquad P = \frac{h}{l} Q + f \frac{b}{l} Q.$$

Si l'on fait dans cette formule $f = 0$, on retombera sur la première valeur de P.

Pour donner un exemple numérique de cette relation, supposons toujours

$$Q = 1500^{k}, \quad h = 1^{m}, \quad l = 5^{m},$$

d'où

$$b = 4^{m},898.$$

Si nous supposons maintenant que le poids Q soit en métal, on aura, en le supposant graissé de suif, et glissant sur bois, $f = 0,08$, et la formule ci-dessus donnera :

1er terme..............	300^{k}
2e terme..............	117,552
d'où	P = 417,552

Ce qui montre que le frottement n'est pas une force négligeable. Cependant nous en ferons abstraction dans les leviers, où le mode de suspension la rend généralement très-petite.

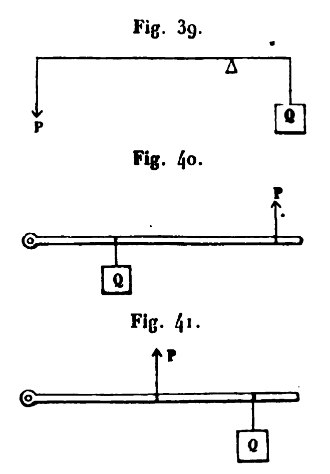
DIVERS GENRES DE LEVIERS; CONDITIONS D'ÉQUILIBRE.

24. *Le levier est un corps de forme quelconque n'ayant que la faculté d'exécuter autour d'un point ou d'un axe fixe un mouvement alternatif de rotation.*

Les conditions d'équilibre du levier ayant été données dans la première leçon, nous y renvoyons le lecteur.

Quand la puissance et la résistance sont parallèles et que le levier est rectiligne, il s'appelle :





Levier du 1[er] *genre*, si le point d'appui est situé entre la puissance P et la résistance Q (*fig.* 39);

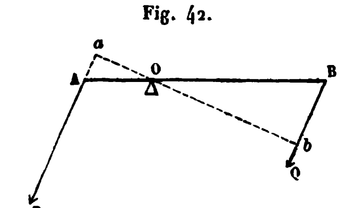
Levier du 2[e] *genre*, quand la résistance est placée entre la puissance et le point d'appui (*fig.* 40);

Levier du 3[e] *genre,* quand la puissance est placée entre la résistance et le point d'appui (*fig.* 41).

Mais quel que soit le genre de levier, si l'on nomme p et q les bras de levier de la puissance P et de la résistance Q, mesurés sur le levier lui-même, on aura pour l'équilibre, en faisant abstraction de son poids,

$$Pp = Qq. \tag{2}$$

En effet, O étant le point d'appui (*fig.* 42), si l'on mène sur la direction commune des forces la perpendiculaire ab, l'équilibre du levier donnera



$$P.Oa = Q.Ob,$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{Ob}{Oa}.$$

Mais les triangles AOa, BOb étant semblables,

$$\frac{Ob}{Oa} = \frac{OB}{OA};$$

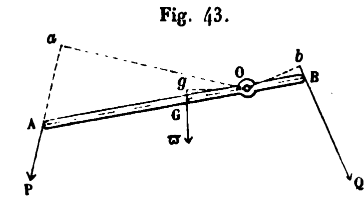
substituant ce rapport dans la valeur de $\frac{P}{Q}$ il vient

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}, \quad \text{d'où} \quad P.OA = Q.OB. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on veut tenir compte du poids du levier, l'équation

d'équilibre deviendra (*fig.* 43) $P.Oa + \varpi.Og = Q.Ob$,

Fig. 43.



G étant le centre de gravité et ϖ le poids de AB. On remarquera maintenant que si G coïncide avec O, Og sera nul, et l'on aura simplement

$$P.Oa = Q.Ob.$$

Ainsi l'on ne pourra, rigoureusement parlant, faire abstraction du poids du levier, que lorsque le centre de gravité coïncidera avec le point fixe.

LEVIERS FAVORABLES OU DÉFAVORABLES A LA PUISSANCE.

Il suit de l'équation (2) qu'un levier sera favorable ou défavorable à la puissance, suivant qu'on aura $p >$ ou $< q$, parce qu'alors on aura $P < Q$ ou $> Q$. Par conséquent *le levier du 1er genre sera tantôt favorable, tantôt défavorable à la puissance.*

Le levier du 2e genre sera toujours favorable à la puissance.

Le levier du 3e genre sera toujours défavorable à la puissance.

LEVIERS FAVORABLES OU DÉFAVORABLES A LA VITESSE.

Suivant qu'un levier sera favorable ou défavorable à la puissance, il sera défavorable ou favorable à la vitesse; de telle sorte que *ce qu'on gagne en force on le perd en vitesse.*

En effet, supposons qu'on fasse prendre au levier la position ab (*fig.* 44), la comparaison des arcs semblables donnera

Fig. 44.

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\text{arc } Bb}{\text{arc } Aa}.$$

Mais dans le cas d'équilibre

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA};$$

donc aussi

$$\frac{P}{Q} = \frac{\text{arc } Bb}{\text{arc } Aa}, \quad \text{d'où} \quad P.\text{arc } Aa = Q.\text{arc } Bb.$$



Par conséquent, suivant que P sera $> Q$ ou $< Q$, arc Aa sera $<$ arcBb ou $>$ arc Bb. Si, par exemple, la puissance est trois fois plus grande que la résistance, le point d'application de la puissance décrira un chemin trois fois moindre que celui de la résistance.

Donc *le levier du 1er genre est tantôt favorable, tantôt défavorable à la vitesse.*

Le levier du 2e genre est toujours défavorable à la vitesse.

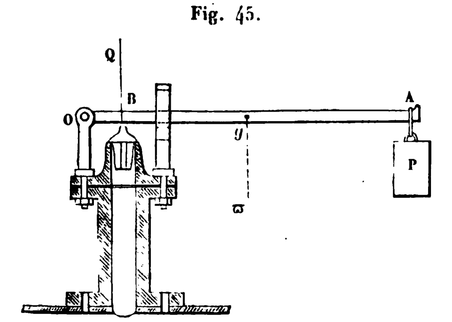
Le levier du 3e genre est toujours favorable à la vitesse.

USAGES GÉNÉRAUX DU LEVIER.

Le levier fait, pour ainsi dire, partie de toutes les machines, où il est employé, tantôt à transmettre de petits mouvements, comme cela a lieu, par exemple, dans les moulins à blé et les machines à vapeur où un levier mû par un pendule conique fait mouvoir tantôt une sonnerie, tantôt un papillon qui ouvre ou ferme les conduits de la vapeur. D'autres fois il sert à exercer des pressions ; c'est ainsi, par exemple, que la soupape de sûreté des chaudières à vapeur, ou de la presse hydraulique, reçoit d'un levier du deuxième genre, chargé d'un poids à son extrémité, une pression égale et contraire à la pression limite de la vapeur ou de l'eau. Le levier sert aussi de base à la plupart des instruments de pesage.

Supposons, par exemple, qu'avec un levier donné OA (*fig.* 45), dont le poids est ϖ et le centre de gravité g, on veuille transmettre en B une pression donnée Q. On demande quel poids il faudra employer?

Fig. 45.



Comme il y a équilibre entre le poids inconnu P et la force Q qu'il faut vaincre, on aura

$$P.OA + \varpi.Og = Q.OB,$$

d'où

$$P = Q\,\frac{OB}{OA} - \varpi.\frac{Og}{OA}.$$

Prenons, par exemple,

$$OA = 1^{m},20,\quad Og = 0,50,\quad OB = 0,20,\quad Q = 200^{k},\quad \varpi = 10^{k},$$

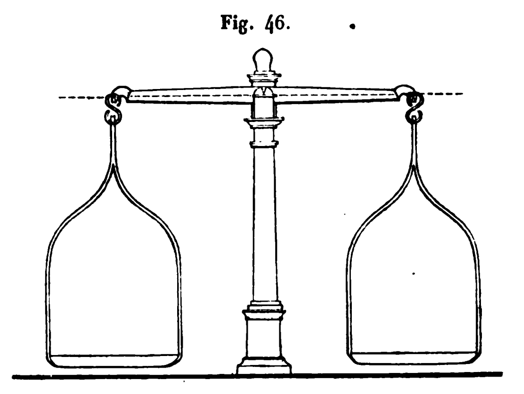
la valeur de P deviendra

$$P = \frac{200 \times 0,20}{1,20} - \frac{10 \times 0,05}{1,20} = 33,333 - 4,167 = 29^{k},166.$$

THÉORIE DE LA BALANCE ORDINAIRE.

25. La balance ordinaire se compose d'un levier qu'on nomme *fléau*, portant en son milieu et perpendiculairement à sa longueur un prisme triangulaire appelé *couteau*, posé par son arête sur deux coussinets, qui sont en agate dans les balances de précision. Aux deux extrémités du fléau sont suspendus deux *plateaux*, à l'aide de deux anneaux en forme de S (*fig.* 46) et taillés intérieurement en couteau, ainsi que

Fig. 46.



les autres anneaux de suspension. Le fléau porte ordinairement en son milieu une aiguille qui parcourt les degrés d'un arc de cercle. Les points de suspension du fléau sont dans le plan des coussinets, sur l'horizontale qui passe par le milieu du couteau et à des distances égales de ce dernier point. Cette condition remplie, si deux poids P et Q se font équilibre dans les deux



plateaux, ils seront nécessairement égaux, car l'équation d'équilibre

$$Pp = Qq$$

donne $P = Q$ quand $p = q$. Pour juger de l'équilibre, il n'est pas nécessaire d'attendre que le fléau ait repris sa position horizontale, il suffit de s'assurer si les oscillations de l'aiguille sont égales de chaque côté du milieu de l'arc qui est le zéro de la graduation. Mais la condition de rendre égaux les deux bras de levier est très-difficile à remplir. Il importe donc de savoir peser avec des balances fausses.

MANIÈRE DE PESER AVEC DES BALANCES FAUSSES.

Proposons-nous, par exemple, de peser 1 kilogramme de sel. On mettra dans un des plateaux un poids gradué de 1 kilogramme; puis on lui fera équilibre, dans l'autre plateau, avec de la grenaille de plomb ou toute autre substance divisée. Cela fait, on retirera le poids gradué et on lui substituera du sel jusqu'à l'équilibre; le sel, mis dans le plateau, pèsera évidemment 1 kilogramme.

Il existe encore une autre méthode pour peser avec des balances fausses, mais elle est moins pratique que la précédente.

Soit P le poids inconnu du corps; on lui fera équilibre dans l'un des plateaux avec des poids gradués Q, et l'on aura

$$Pp = Qq.$$

On transportera P dans l'autre plateau, puis on lui fera équilibre dans le premier avec de nouveaux poids gradués Q', et l'on aura la nouvelle équation

$$Pq = Q'p.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, et simplifiant, il vient

$$(4) \qquad P^2 = QQ', \quad \text{d'où} \quad P = \sqrt{QQ'}.$$

INFLUENCE DE LA POSITION DU CENTRE DE GRAVITÉ SUR LES QUALITÉS D'UNE BALANCE.

Quand le fléau est dans une position horizontale, le centre de gravité du système des plateaux et du fléau est situé sur la verticale du milieu O du couteau; car si l'on nomme ϖ le poids du système proposé, x la distance de la verticale de son centre de gravité au point O, l'équation des moments se réduira à $\varpi x = 0$; mais ϖ n'est pas nul, donc $x = 0$. C. Q. F. D.

BALANCE FOLLE.

Remarquons maintenant que le centre de gravité pourra se trouver, soit au-dessus du point O (*fig.* 47), soit en ce point, soit au-dessous. Si le centre de gravité du système est placé au-dessus du point O, un petit dérangement dans la position horizontale abaissera ce point, qui, ne pouvant reprendre sa position première, entraînera le fléau, jusqu'à lui faire décrire une demi-circonférence. On dit alors que la balance est *folle*.

Si le centre de gravité est situé au milieu O du couteau, la balance restera en équilibre qu'elle que soit la position qu'on lui donne; dans ce cas le moindre excès de poids suffira pour faire faire un quart de tour au fléau.

BALANCE PARESSEUSE.

Il faut donc que le centre de gravité soit au-dessous du point O. Alors si l'on écarte le fléau de sa position horizontale, on élèvera le centre de gravité, et comme ce point tend à descendre, le fléau oscillera de chaque côté de la position horizontale avec d'autant plus de lenteur que le centre de gravité sera plus bas. Si le centre de gravité est trop bas, les oscillations seront très-lentes et la balance sera dite *paresseuse*.

SENSIBILITÉ DE LA BALANCE.

Il importe donc de donner au centre de gravité du fléau une position convenable. Pour cela, on déterminera cette position par la condition qu'un poids additionnel déterminé, placé dans l'un des plateaux, fasse prendre au fléau une inclinaison donnée. *Cette déviation de la position horizontale pour un*



poids additionnel donné est la mesure de la sensibilité de la balance.

Supposons donc deux poids P et Q se faisant équilibre dans les deux plateaux, on aura (*fig.* 47)

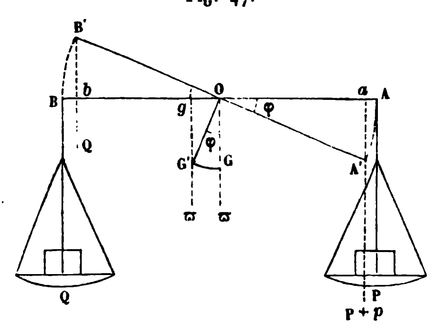


Fig. 47.

$$P.OA = Q.OB.$$

Au poids P, ajoutons maintenant un poids additionnel p; le fléau s'inclinera, le centre de gravité qui était en G, prendra une position G′ dans laquelle le système se constituera dans un nouvel état d'équilibre, et il s'agit de déterminer OG sous la condition que l'angle $AOA' = \varphi$ prenne une valeur donnée d'avance.

A cet effet, remarquons que pour la nouvelle position du levier, l'équation d'équilibre devient

$$(P + p)\,Oa = Q.Ob + \varpi.Og.$$

Mais

$$Oa = OA'.\cos\varphi = OA.\cos\varphi,$$

$$Ob = OB'.\cos\varphi = OB.\cos\varphi,$$

$$Og = OG.\sin\varphi;$$

par suite,

$$(P + p)\,OA.\cos\varphi = Q.OB\ \cos\varphi + \varpi.OG.\sin\varphi.$$

Développant et supprimant les deux termes égaux $P.OA.\cos\varphi$ et $Q.OB.\cos\varphi$, il reste

$$p.OA.\cos\varphi = \varpi.OG.\sin\varphi,$$

d'où

$$(5)\qquad OG = \frac{p}{\varpi}.\frac{OA}{\operatorname{tang}\varphi}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si par exemple on veut qu'un poids additionnel égal au trois-centième du poids du système, fasse incliner le fléau de 10 degrés,

on fera

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{1}{300}, \quad \varphi = 10^{\circ};$$

alors si l'on suppose

$$OA = 0^{m},30,$$

on trouvera

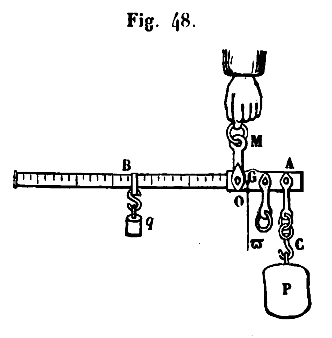
$$OG = 0^{m},0057.$$

Il faudra donc que le constructeur s'arrange de manière que le centre de gravité du fléau, chargé des deux plateaux, soit à $0^{m},0057$ de distance verticale au-dessous des coussinets.

THÉORIE DE LA BALANCE ROMAINE.

26. La balance romaine consiste en un levier du premier genre qu'on suspend à l'aide d'un anneau M (*fig.* 48), soit avec la main, soit à une corde, soit à une barre horizontale. A l'extrémité A du levier, se trouve un second crochet, ou un plateau de balance, destiné à recevoir le corps à peser. Enfin, sur la deuxième partie du levier, on fait mouvoir un curseur jusqu'à ce que le système soit en équilibre. Le poids du corps se lit à l'endroit où le curseur s'arrête.

Fig. 48.



Pour graduer cet instrument, nommons ϖ son poids et G son centre de gravité; q étant le poids du curseur, P le poids du corps, on aura l'équation d'équilibre

$$P.OA + \varpi.OG = q.OB,$$

d'où l'on tire

$$OB = \frac{\varpi}{q}\,OG + \frac{P}{q}\cdot OA.$$

Comme le premier terme du deuxième membre est constant, posons, pour abréger,

$$\frac{\varpi}{q}\cdot OG = l,$$



et l'équation deviendra

$$(6) \qquad OB = l + \frac{P}{q} \cdot OA.$$

Faisons maintenant dans cette formule $P = 0$; elle donne

$$OB = l.$$

Portant à gauche du point O une distance égale à l, on aura le zéro de la graduation. Mais ce point s'obtient plus aisément par l'expérience, en faisant courir le curseur jusqu'à l'équilibre de la romaine non chargée. Posons encore

$$P = q,$$

la même formule donne

$$OB = l + OA.$$

Donc en portant à gauche du zéro la distance OA, on aura le n° 1 de la graduation, lequel répond au poids du curseur. Faisant successivement

$$P = 2q, \quad P = 3q.. \, ,$$

on trouvera

$$OB = l + 2OA, \quad OB = l + 3OA\ldots,$$

et ainsi de suite.

Par conséquent en portant à la suite les unes des autres, à partir du zéro, la distance constante OA, on aura les graduations répondant à 2 fois, 3 fois, etc., le poids du curseur. Les fractions de q s'obtiennent de la même manière. Si, par exemple, dans une opération de pesage, le curseur s'arrête au n° 15,5, le corps pesera 15 fois et demie autant que le curseur. La loi défend l'usage de la balance romaine dans le commerce, attendu que cet instrument donnerait des indications trop fortes ou trop faibles, suivant qu'on se servirait d'un curseur d'un poids plus petit ou plus grand que celui qui a servi à la graduation.

THÉORIE DE LA BALANCE BASCULE DE QUINTENZ.

27. La figure ci-après montre suffisamment la disposition et le jeu des *leviers de la machine*, lesquels se font mutuellement

équilibre. Ainsi la charge Q agit à la fois sur le levier BC par

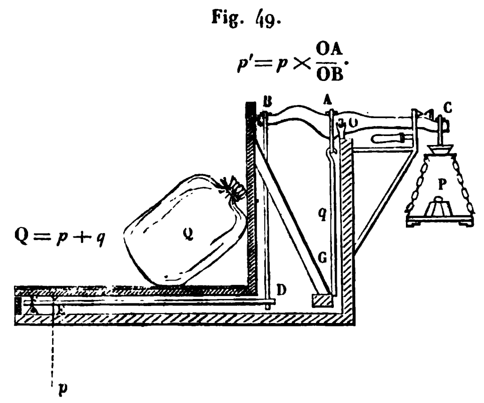


Fig. 49.

la tringle AG, et sur le levier DF, lequel transmet son action à BC par la tringle BD. On fait équilibre à la charge Q au moyen de poids gradués P qu'on place sur un plateau suspendu à l'extrémité C; on multiplie ensuite généralement P par 10, et l'on a la valeur de Q.

Pour le faire voir, soient p, p' et q les actions qui s'exercent sur le levier DE et sur les tringles; on aura d'abord pour l'équilibre du levier DF,

$$p'.\mathrm{DF}=p.\mathrm{FE}, \quad \text{d'où} \quad p'=p.\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FD}}.$$

Mais le levier BC est tel, qu'on a

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FD}};$$

substituant la valeur de ce rapport dans celle de p', il vient, en posant, pour abréger, $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\mathrm{K}$,

$$p'=\mathrm{K}p.$$

(Les distances OA, OB, OC, sont mesurées sur l'horizontale du point fixe O, prolongée jusqu'aux axes des tringles.) Mais l'équilibre du levier BC donne à son tour

$$\mathrm{P.OC}=p'.\mathrm{OB}+q.\mathrm{OA};$$

remplaçant p' par sa valeur ci-dessus, il vient

$$\mathrm{P.OC}=p.\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.\mathrm{OB}+q.\mathrm{OA},$$

et en simplifiant,

$$P.OC = p.OA + q.OA = (p + q)\,OA.$$

Mais $Q = p + q$; donc

$$P.OC = Q.OP,$$

D'où l'on tire, en posant $\frac{OC}{OA} = m$,

$$(7) \qquad Q = mP.$$

Comme la quantité m est arbitraire, on prend ordinairement $m = 10$, d'où

$$Q = 10\,P.$$

C. Q. F. D.

Calculons encore les tensions p, p' et q.

Pour cela, nous aurons à la fois

$$\begin{cases} kp + q = p + P, \\ p + q = Q = mP, \\ p' = kp. \end{cases}$$

Résolvant les deux premières équations, on trouve

$$(8) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{m-1}{2-k}P, \\ q = \dfrac{m(1-k)+1}{2-k}P, \end{cases}$$

et ensuite

$$(9) \qquad p' = \frac{m-1}{2-k}kP.$$

Maintenant si l'on veut avoir $p = q$, les équations (8) et (9) donneront

$$(10) \qquad k = \frac{2}{m}, \quad p' = P.$$

Enfin si l'on prend, comme ci-dessus, $m = 10$, on aura

$$(11) \qquad k = \frac{1}{5}.$$

Les valeurs précédentes de m et de k sont celles qu'on adopte généralement dans la pratique.

THÉORIE DU PESON.

28. BOA (*fig.* 50) est un levier coudé, formé d'une seule pièce et dont l'angle est θ.

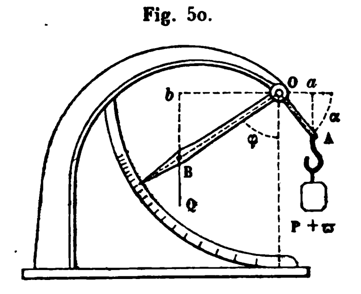


Fig. 50.

Q est le poids de ce levier coudé, lequel porte l'aiguille indicatrice; celle-ci est assez lourde pour que le centre de gravité du système soit en B. ϖ est le poids de la balance, ou du crochet suspendu en A. P étant un poids attaché au crochet, la condition de l'équilibre est exprimée par l'équation

$$(1)\qquad (P+\varpi)\,Oa = Q.Ob;$$

on a aussi

$$(2)\qquad \alpha = 90^\circ + \varphi - \theta, \quad \text{ou} \quad \alpha = 90^\circ - (\theta - \varphi).$$

Posant, pour abréger, $OA = p$, $OB = q$, on trouve sans peine

$$Oa = p\sin(\theta - \varphi), \quad Ob = q\sin\varphi.$$

Par conséquent

$$(P+\varpi)\,p\sin(\theta-\varphi) = Qq\sin\varphi.$$

Développant, et résolvant l'équation par rapport à tang φ, il vient

$$(3)\qquad \tan\varphi = \frac{(P+\varpi)\,p\sin\theta}{(P+\varpi)\,p\cos\theta + Qq}.$$

En faisant dans cette formule $P = 0$, on aura pour la valeur de l'angle φ qui répond au zéro de la graduation,

$$(4)\qquad \tan\varphi_0 = \frac{\varpi p\sin\theta}{\varpi p\cos\theta + Qq}.$$

En supposant dans l'équation (3) $P = 1^k$, $P = 2^k, \ldots$, on aura les valeurs de l'angle φ nécessaires à la graduation de l'instrument.

Si l'on veut que le coude OA soit horizontal quand l'aiguille est à zéro, il faut poser $\alpha = 0$; alors on tire de l'équation (2)

(5) $$\theta = 90° + \varphi_0;$$

celle-ci donne à son tour

$$\text{tang}\, \varphi_0 = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Substituant cette valeur dans (4), il vient

(6) $$\cos\theta = -\frac{\varpi p}{Qq}.$$

Ayant choisi à volonté les quantités p, q, Q, cette équation fera connaître ϖ si l'angle θ des leviers est donné, ou θ si c'est ϖ qui est connu.

Remarquons maintenant que quel que soit θ, l'angle φ augmente avec P; en effet, la valeur de tang φ peut s'écrire

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{p \sin\theta}{P\cos\theta + \dfrac{Qq}{P+\varpi}}.$$

Si $\cos\theta > 0$, à mesure que P augmente, le dénominateur diminue; par suite tang φ augmente. Si $\cos\theta < 0$, et qu'on pose $\cos\theta = -\varepsilon^2$, l'expression de tang φ deviendra

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{p \sin\theta}{\dfrac{Qq}{P+\varpi} - p\varepsilon^2}.$$

Or, tant qu'on aura $\dfrac{Qq}{P+\varpi} > p\varepsilon^2$, tang φ augmentera avec P. Si $\dfrac{Qq}{P+\varpi} < p\varepsilon^2$, la valeur de tang φ pourra s'écrire

$$\text{tang}\, \varphi = -\frac{p \sin\theta}{p\varepsilon^2 - \dfrac{Qq}{P+\varpi}}.$$

Sous cette forme on voit que tang φ décroîtra numériquement à mesure que P augmentera; donc l'angle φ croîtra encore à cause que tang $\varphi < 0$. Ainsi l'angle φ croîtra depuis $P = 0$

jusqu'à $P = \infty$. Pour cette dernière valeur on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{\sin\theta}{\varepsilon^2} = \operatorname{tang}\theta.$$

Par conséquent *l'angle* φ *ne pourra pas croître au delà de l'angle du levier coudé.*

Reprenons la formule (6), savoir

$$\cos\theta = -\frac{\varpi p}{Qq}.$$

Si l'on veut connaître la valeur de P pour laquelle $\varphi = 90^\circ$, il suffira d'égaler à zéro le dénominateur de l'équation (3), ce qui donne

$$(P + \varpi)\, p\cos\theta = -Qq.$$

De là on tire

$$P = -\frac{Qq}{p\cos\theta} - \varpi.$$

Remplaçant $\cos\theta$ par la valeur ci-dessus, il vient

$$(7)\qquad P = \frac{Q}{\varpi}\left(\frac{q}{p}\right)^2 Q - \varpi.$$

Si par exemple $Q = 2^k$, $\varpi = 2$, $\frac{q}{p} = 4$, on trouve

$$P = 30^k.$$

On voit que quelque grand que soit P, l'angle d'écart de l'aiguille ne sera jamais droit; d'où il résulte que le peson pourrait servir à évaluer des poids quelconques si les supports étaient capables d'une résistance indéfinie.

EXEMPLES DE LEVIERS.

29. Une foule d'instruments se rapportent au levier.

Nous citerons parmi les leviers du 1er genre les ciseaux, les tenailles, les tisonniers, le levier des paveurs, etc.

Parmi les leviers du 2e genre, la brouette, les rames des bateaux, le casse-noisette, etc.

Enfin, parmi les leviers du 3e genre, nous citerons les



pinces, les pincettes, les ciseaux à tondre, le marchepied du rouet à filer, etc.

Le corps humain, pendant la locomotion, se meut à l'aide d'un levier du 2e genre. Le point d'appui est sous la plante du pied, la puissance agit à l'extrémité du talon, à l'aide du tendon d'Achille. La mâchoire se comporte à la manière des leviers de 2e et 3e genre. Le point d'appui est à l'articulation derrière l'oreille; la puissance agit sur la mâchoire inférieure, qui seule est mobile, à peu près vers le milieu de la joue, à l'aide d'un muscle qui gonfle la tempe quand on mange. Si l'on met la résistance sous les dents incisives, la mâchoire agit comme levier du 3e genre; elle agit comme levier du 2e genre, si on met la résistance sous les molaires; et l'on doit admirer la prévoyance de la nature qui a pourvu de dents tranchantes le levier le plus défavorable à la force, et de dents plates, propres seulement à écraser, le levier le plus favorable à la force.

HUITIÈME LEÇON.

DU PLAN INCLINÉ ET DU TREUIL.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS ASSUJETTI A GLISSER SUR UN PLAN INCLINÉ.

30. Un plan incliné est un plan inébranlable, contre lequel le corps s'appuie, et sur lequel il n'a que la liberté de glisser. Dans la pratique, on fait ordinairement agir la puissance de deux manières différentes, parallèlement à la longueur du plan incliné, ou parallèlement à la base.

CAS OU LA PUISSANCE EST PARALLÈLE AU PLAN.

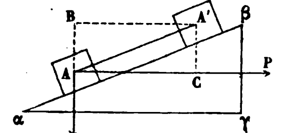
Le cas où la puissance est parallèle au plan incliné a été traité aux n°s 4 et 23, nous y renvoyons le lecteur.

Il nous reste à examiner celui où la puissance est parallèle à la base du plan incliné.

CAS OU LA PUISSANCE EST PARALLÈLE A LA BASE DU PLAN INCLINÉ, ET QU'ON N'A PAS ÉGARD AU FROTTEMENT.

Supposons que le corps glisse de A jusqu'en A' (*fig.* 51); le travail de la puissance P sera P.AC, celui de la résistance Q sera Q.AB, et l'on aura

Fig. 51.



$$P.AC = Q.AB, \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{Q} = \frac{AB}{AC}.$$

Mais les triangles ABA', $\alpha\beta\gamma$ étant semblables, donnent

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B\gamma}{\alpha\gamma};$$

donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{B\gamma}{\alpha\gamma},$$

et si l'on pose

$$B\gamma = h, \quad \alpha\gamma = b,$$

l'équation de l'équilibre devient

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{b}.$$

Ce qui fait voir que *lorsque la puissance est parallèle à la base du plan incliné, il faut pour l'équilibre ou le mouvement uniforme du corps, que la puissance soit à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à la base.*

CAS OU L'ON A ÉGARD AU FROTTEMENT.

Posons, pour abréger,

$$\alpha B = l, \quad B\gamma = h, \quad \alpha\gamma = b \ (fig.\ 52).$$

Fig. 52.

Nommons aussi N la pression normale au plan. Le frottement qui naîtra de cette pression aura pour valeur Nf, de sorte que les forces qui sollicitent le corps A et qui se font équilibre dans le mouvement uniforme sont :

La puissance P,
La résistance Q,
La réaction N,
Le frottement Nf.

Remarquons maintenant que les travaux élémentaires de ces différentes forces sont :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}P &= P.A'B, \\ \mathfrak{T}Q &= -Q.AB, \\ \mathfrak{T}N &= 0, \\ \mathfrak{T}Nf &= -Nf.AA'. \end{aligned}$$

Égalant à zéro la somme algébrique de ces travaux, on trouve

$$P.A'B = Q.AB + Nf.AA',$$

d'où

$$P = Q \cdot \frac{AB}{A'B} + Nf \cdot \frac{AA'}{A'B}.$$

Mais les triangles semblables $AA'B$, $\alpha B \gamma$ donnent

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{h}{b}, \quad \frac{AA'}{A'B} = \frac{l}{b};$$

par conséquent

$$P = Q\frac{h}{b} + Nf\frac{l}{b}.$$

Il reste encore à trouver N : or N est la somme des composantes de P et de Q, estimées suivant AN; donc

$$(1) \quad \begin{cases} N = P\sin\alpha + Q\cos\alpha, \\ Nl = Pl\sin\alpha + Ql\cos\alpha. \end{cases}$$

Mais

$$h = l\sin\alpha, \quad b = l\cos\alpha;$$

de là il résulte

$$N = Ph + Qb.$$

Substituant cette valeur dans celle de P, on obtient

$$P = Q\frac{h}{b} + \frac{f}{b}(Ph + Qb).$$

Résolvant par rapport à P, on trouve en définitive

$$(2) \quad P = Q\frac{h + fb}{b - fh}.$$

Si, dans cette formule, on fait $f = 0$, on retombe sur la valeur déjà trouvée.

Il est évident que si l'on remplace le plan incliné par une force égale et contraire à N, l'état du corps ne sera pas changé, et il sera permis de le considérer comme étant parfaitement libre. Mais les forces qui le sollicitent sont dans un même plan, il faudra donc ici, pour l'équilibre, que la somme des composantes parallèles à chacun des axes Ax et Ay soit nulle.



On est conduit de la sorte aux deux équations

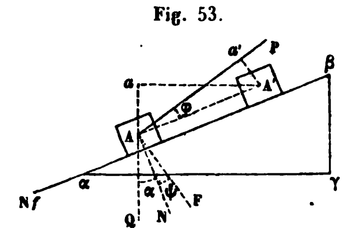
$$P = N \sin\alpha + Nf \cos\alpha,$$
$$Q = N \cos\alpha - Nf \sin\alpha.$$

Si l'on substitue dans la première la valeur de N tirée de la seconde, on retombe sur l'équation (2). Si l'on multiplie les deux membres de la première par $\sin\alpha$, les deux membres de la seconde par $\cos\alpha$, et qu'on les ajoute, ou retrouve la valeur (1) de N.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SUR UN PLAN INCLINÉ QUAND LA PUISSANCE A UNE DIRECTION QUELCONQUE.

Les deux cas déjà traités de l'équilibre du plan incliné ne sont qu'une conséquence de celui où la puissance P (*fig.* 53) fait avec le plan incliné un angle quelconque φ. (Cet angle sera regardé comme positif ou comme négatif suivant qu'il sera compté au-dessus ou au-dessous de AA'.)

Fig. 53.



N étant toujours la pression normale au plan, Nf sera la valeur du frottement, et l'on aura pour l'équilibré,

$$P.Aa' = Q.Aa + Nf.AA'.$$

Mais

$$Aa' = AA' \cos\varphi, \quad Aa = AA' \sin\alpha;$$

donc

$$P \cos\varphi = Q \sin\alpha + Nf.$$

Si l'on remarque maintenant que

$$N = -P \sin\varphi + Q \cos\alpha,$$

l'équation précédente devient

$$P \cos\varphi = Q \sin\alpha - Pf \sin\varphi + Qf \cos\alpha,$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad P = Q \frac{\sin\alpha + f \cos\alpha}{\cos\varphi + f \sin\varphi}.$$

Mais

$$\sin\alpha = \frac{h}{l}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{l};$$

donc

$$(4) \qquad P = Q\,\frac{h + bf}{l(\cos\varphi + f\sin\varphi)}.$$

Si la force P était destinée à empêcher l'accélération du mouvement du corps descendant le long du plan incliné, il faudrait changer le signe de f.

Si l'on veut que la puissance soit parallèle au plan, on aura

$$\varphi = 0, \quad \text{et par suite} \quad P = Q\,\frac{h + bf}{l},$$

laquelle coïncide avec la formule (1) du n° 23.

Si P est parallèle à la base du plan, $\varphi = -\alpha$, et la valeur de P devient

$$P = Q\,\frac{h + bf}{l\cos\alpha - fl\sin\alpha},$$

et plus simplement

$$P = Q\,\frac{h + bf}{b - fh},$$

ce qui s'accorde avec la formule (2) démontrée ci-dessus.

* Si l'on veut connaître la moindre valeur de P qui sera capable d'entretenir le mouvement uniforme de la résistance Q, il suffira de prendre la dérivée de P par rapport à φ dans l'équation (4), et de l'égaler à zéro. Prenant cette dérivée, on trouve

$$\frac{dP}{d\varphi} = P\,\frac{\sin\varphi - f\cos\varphi}{\cos\varphi + f\sin\varphi};$$

posant

$$\frac{dP}{d\varphi} = 0,$$

il en résulte

$$(5) \qquad \tang\varphi = f;$$

et comme pour cette valeur de φ,

$$\frac{d^2 P}{d\varphi^2} = P,$$

on en conclut que la valeur correspondante de P, savoir

(6) $$P = \frac{Q(h + bf)}{l\sqrt{1 + f^2}},$$

est un minimum.

On voit donc que *pour produire le glissement d'un corps sur un plan incliné avec la moindre force, il faut faire agir celle-ci de telle sorte, qu'elle fasse avec le plan, du côté où le mouvement doit se faire, un angle égal à l'angle du frottement.*

Pour que le glissement du corps soit possible, il faut que le dénominateur de la valeur générale de P ne soit pas nul. Donc la force P ne pourra produire le glissement si

$$\cos\varphi + f\sin\varphi = 0,$$

d'où

$$\tang\varphi = -\frac{1}{f}.$$

Soit ψ l'angle que la force P fait avec la normale AN, on a

$$\psi = 90^\circ + \varphi,$$

d'où

$$\varphi = \psi - 90^\circ;$$

par suite

$$\sin\varphi = -\cos\psi,$$
$$\cos\varphi = \sin\psi,$$
$$\tang\varphi = -\frac{1}{\tang\psi}.$$

Mais

$$\tang\varphi = -\frac{1}{f};$$

donc

$$\tang\psi = f.$$

Donc *une force* F *ne saurait produire le glissement d'un corps sur un plan lorsqu'elle fait avec la normale au plan*

un angle égal à l'angle du frottement, cet angle étant compté à partir de la normale du côté vers lequel le mouvement doit se faire.

On peut s'assurer directement que toute force F, appliquée au mobile sous l'angle ψ ne saurait aider au glissement. Pour le faire voir, nous remarquerons que les composantes de F suivant AA′ et AN, sont : $F \sin\psi$, $F \cos\psi$; mais la pression normale $F \cos\psi$ donne lieu à un frottement $f F \cos\psi$ dirigé en sens contraire du mouvement, et l'on a

$$fF \cos\psi = F \sin\psi,$$

puisque par hypothèse

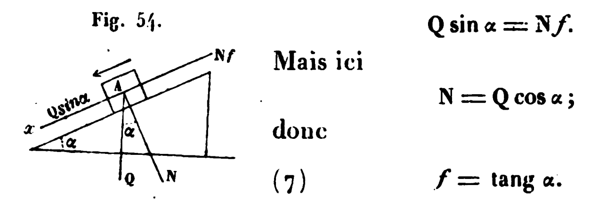
$$\tang\psi = f;$$

donc les deux forces se détruisent C. Q. F. D.

COEFFICIENT DU FROTTEMENT AU DÉPART.

Au moment où le corps est sur le point de glisser en vertu de son propre poids, le frottement Nf est égal à la composante de Q estimée suivant Ax (*fig.* 54); on aura donc

Fig. 54.



$$Q \sin\alpha = Nf.$$

Mais ici

$$N = Q \cos\alpha;$$

donc

$$(7) \qquad f = \tang\alpha.$$

Pour déterminer f, il suffira par conséquent de relever le plan incliné jusqu'à produire le mouvement, et de mesurer ensuite l'inclinaison de ce plan sur l'horizon. L'angle α déterminé par l'équation (7) est ce qu'on nomme l'*angle du frottement*.

L'expérience démontre que le frottement est un peu plus grand au départ du mobile que pendant le mouvement.

LOIS DU FROTTEMENT.

Déjà plusieurs fois nous avons fait usage de l'une des lois du frottement; nous les résumerons ici toutes :

1°. Le frottement est proportionnel à la pression totale qui s'exerce entre les surfaces en contact.

2°. Pour une même pression, il est le même quelle que soit l'étendue des surfaces frottantes.

3°. Il est indépendant de la vitesse.

4°. Il est un peu plus grand au départ que pendant le mouvement.

TABLE DES COEFFICIENTS DU FROTTEMENT.

Les physiciens ont déterminé par l'expérience les coefficients du frottement pour les diverses substances qui entrent dans la construction des machines. Les tableaux ci-après contiennent les résultats auxquels ils ont été conduits.

Valeurs de f ou Table des rapports du frottement à la pression au moment du départ.

		ÉTAT DES SURFACES OU NATURE DE L'ENDUIT.					
		A sec	Mouillées d'eau.	Suif.	Savon sec.	Onct. et polies.	Huile d'olive.
Bois sur bois.....	Minimum .	0,30	0,65	0,14	0,22	0,30	»
	Moyen....	0,50	0,68	0,19	0,36	0,36	»
	Maximum.	0,70	0,71	0,25	0,44	0,40	»
Bois et métaux.............		0,60	0,65	0,12	»	0,20	»
Cordes ou sangles sur bois.......	Minimum .	0,50	»	»	»	»	»
	Moyen....	0,63	»	»	»	»	»
	Maximum.	0,80	»	»	»	»	»
Métaux sur métaux	Minimum .	0,15	»	»	»	0,11	»
	Moyen....	0,18	»	»	»	0,12	»
	Maximum.	0,24	»	»	»	0,16	»

Valeurs de f ou Table des rapports du frottement à la pression pendant le mouvement.

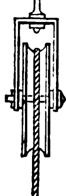
		ÉTAT DES SURFACES OU NATURE DE L'ENDUIT.					
		A sec.	Mouillées d'eau.	Suif.	Savon sec.	Onct. de graisse.	Huile d'olive.
Bois sur bois.....	Minimum .	0,20	»	0,06	0,14	0,08	»
	Moyen....	0,36	0,25	0,07	0,14	0,12	»
	Maximum.	0,48	»	0,08	0,16	0,15	»
Bois et métaux...	Minimum .	0,20	»	0,06	»	0,10	0,05
	Moyen....	0,42	0,24	0,08	0,20	0,14	0,06
	Maximum.	0,62	»	0,10	»	0,16	0,08
Cordes ou sangles sur chêne..		0,45	0,33	»	»	»	»
Métaux sur métaux	Minimum .	0,15	»	0,07	»	0,11	0,06
	Moyen....	0,18	0,31	0,09	0,20	0,13	0,07
	Maximum	0,24	»	0,11	»	0,17	0,08

DIVERS GENRES DE TREUILS.

31. *Le tour ou treuil, dans son acception la plus générale, est un corps de forme quelconque assujetti à tourner autour d'un axe fixe.* Mais dans le plus grand nombre de cas, le treuil consiste en un cylindre, terminé par deux autres cylindres plus petits, de même axe, appelés *tourillons*, et qui tournent dans des ouvertures circulaires ou demi-circulaires appelées *gorges*, *œils*, *coussinets* ou *paliers*.

Le plus simple des tours est la *poulie* (*fig.* 55), qui consiste en une roue dont la circonférence porte une rainure appelée *gorge*.

Fig. 55.

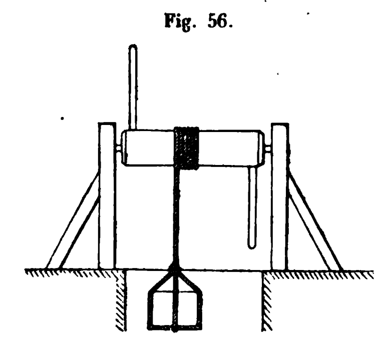


Cette roue porte deux tourillons qui tournent dans deux ouvertures pratiquées dans une pièce qui embrasse la poulie, et qu'on nomme *chape*. La puissance et la résistance agissent aux deux extrémités d'une corde très-flexible qui s'enroule sur la gorge de la poulie.



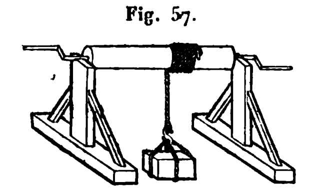
La forme du treuil varie avec la manière d'appliquer la puissance. Le cylindre est souvent percé de trous dirigés vers l'axe, et dans lesquels on introduit à volonté des barres de bois, aux extrémités desquelles on applique la force (*fig.* 56). La résistance agit à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur le cylindre. Les charrettes de roulage, les haquets, les chèvres, etc., sont munis de treuils de cette espèce.

Fig. 56.



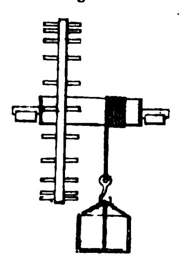
D'autres fois, comme dans le treuil des puits (*fig.* 57), la puissance agit à l'extrémité d'une manivelle qu'on fait mouvoir avec la main. La résistance consiste en un poids attaché à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur le cylindre.

Fig. 57.



Dans certains autres cas, comme dans le treuil des carriers (*fig.* 58), la manivelle est remplacée par une roue solidement fixée au cylindre, et portant sur la circonférence des chevilles sur lesquelles l'ouvrier agit par son poids. Dans quelques treuils à axe horizontal, la circonférence intérieure de la roue porte de petites traverses sur lesquelles l'ouvrier pose alternativement les pieds comme pour marcher; il met ainsi la roue en mouvement en agissant par son poids.

Fig. 58.



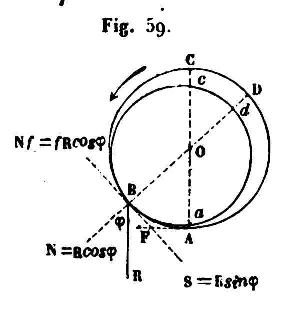
Quand l'axe est vertical, le treuil prend le nom de *cabestan*.

ROTATION DES TOURILLONS SUR LES COUSSINETS.

32. A l'état de repos, le tourillon *abcd* (*fig.* 59) s'appuiera sur le point le plus bas A du coussinet ABCD. Mais si le tou-

rillon se met en mouvement dans le sens de la flèche, il se produira au même instant, au point de contact, un frottement F dirigé suivant la tangente, et qui obligera le tourillon à s'élever successivement sur le coussinet comme sur un plan incliné, jusqu'en un point B où se fera la rotation. Mais pour que le tourillon se maintienne en équilibre au point B, il faut nécessairement que la résultante R des forces qui le sollicitent passe par ce point, sans quoi le frottement qui agit en B ne pourrait pas être tenu en équilibre, et le mouvement ascensionnel du tourillon continuerait jusqu'à ce que la génératrice de contact rencontrerait la direction de R. Soit donc O le centre du coussinet, et φ l'angle que la normale au point B fait avec R; la composante de R suivant la normale BN est $R\cos\varphi$, et suivant la tangente BS, $R\sin\varphi$. Par suite, le frottement aura pour valeur $fR\cos\varphi$, et l'on aura, pour l'équilibre du tourillon sur le plan incliné BS,

Fig. 59.



$$fR\cos\varphi = R\sin\varphi;$$

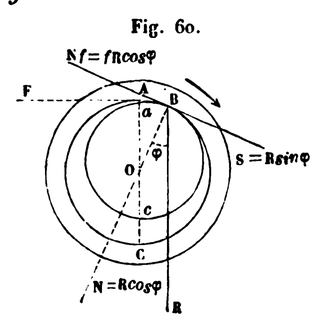
d'où

$$\tan\varphi = f. \tag{1}$$

Ce qui fait voir que le *tourillon remontera sur le coussinet, jusqu'à ce que la normale au point de contact fasse avec la résultante des forces qui le sollicitent, un angle égal à l'angle du frottement.*

Quelquefois la roue tourne (*fig.* 60) sur un tourillon qui ne fait pas partie de la roue; mais les choses se passent comme dans le cas précédent. Si, par exemple, une poulie ABC tourne sur le tourillon aBc, dans le sens de la flèche, le frottement F

Fig. 60.



qui agit sur la poulie, en sens contraire du mouvement, amènera la rotation à se faire autour d'un point B, placé du côté vers lequel se fait le mouvement, et tel, qu'on aura

$$R \sin \varphi = f R \cos \varphi,$$

d'où

$$\tang \varphi = f,$$

ce qui est le même résultat que précédemment.

THÉORIE DE LA POULIE FIXE.

33. La poulie étant dans le même cas que si elle tournait autour d'un axe, mené par son centre O, on aura pour l'équilibre (*fig.* 61)

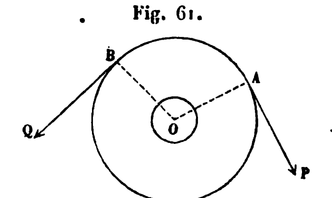


Fig. 61.

$$P.OA = Q.OB,$$

d'où

$$P = Q.$$

Ce qui fait voir que *dans l'équilibre de la poulie fixe, la puissance est égale à la résistance lorsqu'on n'a pas égard au frottement*. La poulie fixe ne peut donc servir qu'à changer la direction de la puissance.

Ayons égard maintenant au frottement.

Soient P la puissance, Q la résistance et ϖ le poids de la poulie (*fig.* 62); la résultante R de ces forces devra passer par le point A où se fera la rotation. Une fois le mouvement uniforme établi, et en supposant qu'il s'effectue dans le sens de la flèche, la poulie sera soumise à l'action des forces P, Q, ϖ, Nf, N, cette dernière étant la réaction normale du coussinet sur le tourillon. En ayant égard à toutes ces forces, la poulie pourra donc être regardée comme étant entièrement libre, et il faudra, pour l'équilibre, 1° que la somme des composantes

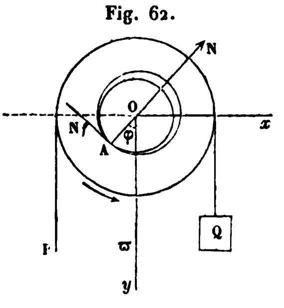


Fig. 62.

parallèles à chaque axe Ox et Oy soit nulle; 2° que la somme algébrique des moments par rapport au centre O de la poulie soit aussi nulle; on sera conduit de la sorte aux trois équations

$$(1)\qquad \begin{cases} N\sin\varphi - Nf\cos\varphi = 0, \\ N\cos\varphi + Nf\sin\varphi = P + Q + \varpi, \\ Pr = Qr + Nf\rho, \end{cases}$$

dans lesquelles r est le rayon de la poulie, ρ celui du tourillon. On tire de la première

$$\tang\varphi = f,$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu au numéro précédent.

En élevant au carré les deux premières, puis ajoutant, on obtient

$$N = \frac{P + Q + \varpi}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Substituant cette valeur dans la troisième équation, on en tire

$$(2)\qquad P = \frac{Q\left(r\sqrt{1+f^2} + f\rho\right) + \varpi f\rho}{r\sqrt{1+f^2} - f\rho}.$$

Si dans cette formule on fait $f = 0$, et même si l'on se contente d'y négliger les termes facteurs de $f\rho$, elle se réduit à $P = Q$. Cette équation pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{P}{Q} = \frac{r\sqrt{1+f^2} + f\rho}{r\sqrt{1+f^2} - f\rho} + \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2} - f\rho}\,\frac{\varpi}{Q},$$

on voit que ce rapport sera d'autant plus petit que la charge Q sera plus grande. Donc il y a *économie de force motrice à soulever avec la poulie de grandes charges.*

La formule (2) montre aussi que *pour une même valeur de* Q, P *sera d'autant plus petit que le rayon du tourillon sera moindre par rapport à celui de la poulie.*

THÉORIE DE LA POULIE MOBILE.

Faisons d'abord abstraction du frottement.

Nommant Q la charge en y comprenant le poids de la



chape (*fig.* 63), P la puissance, ϖ le poids de la poulie, T la tension de la corde attachée en C, on aura, dans l'état d'équilibre,

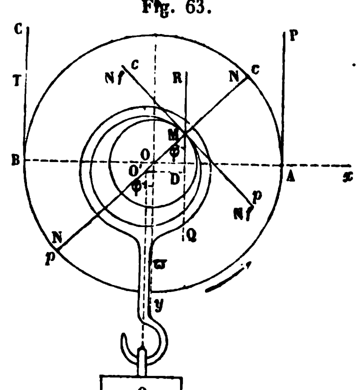


Fig. 63.

$$P + T = Q + \varpi.$$

Mais, puisqu'on n'a pas égard au frottement,

$$T = P;$$

donc

$$P = \frac{1}{2}(Q + \varpi).$$

Ce qui fait voir que *pour l'équilibre de la poulie mobile, il faut que la puissance soit égale à la moitié de la résistance alors qu'on n'a pas égard au frottement.*

Ayons égard maintenant à cette dernière force.

D'abord la résultante R des forces P, T, ϖ soulèvera la poulie de manière à amener le tourillon en un certain point M. Cela posé, N étant la pression normale du tourillon sur la chape et réciproquement, il naîtra de cette pression un double frottement Nf qui sera dirigé, ainsi que la réaction N, comme on l'a marqué sur la figure par les lettres c et p, c'est-à-dire par les premières lettres des mots chape et poulie. La poulie étant soumise aux cinq forces

$$P,\ T,\ \varpi,\ N,\ Nf,$$

on aura, pour l'équilibre, en prenant le point O pour centre de moments,

$$\left\{\begin{array}{l} N\sin\varphi - Nf\cos\varphi = 0, \\ N\cos\varphi + Nf\sin\varphi = P + T - \varpi, \\ Pr - Tr - Nf\rho = 0. \end{array}\right.$$

Les forces qui sollicitent la chape sont Q, N, Nf. En faisant la somme de ces forces décomposées parallèlement à l'axe des x, on retrouve la première des équations ci-dessus; la somme des composantes parallèles à l'axe des y donne

$$N\cos\varphi + Nf\sin\varphi = Q.$$

Enfin la somme des moments relatifs au point O′ se réduit à

$$Nf.O'M = o,$$

ce qui fait voir que l'équilibre de la chape est impossible avec la position actuelle de la force Q. Il faut conclure de là que, sous l'influence du frottement Nf, la chape tournera autour du centre O′, et cette rotation qui se fera dans le sens du mouvement de la poulie, continuera jusqu'à ce que la résultante Q de la charge et du poids de la chape prenne une position telle, qu'on ait, en posant $OO' = \Delta$,

$$Nf(\rho + \Delta) = Q.O'D = Qq.$$

Les équations du mouvement uniforme de la poulie mobile seront donc, en résumé,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{POULIE.} & \left\{\begin{array}{l} N \sin\varphi - Nf\cos\varphi = o, \\ N\cos\varphi + Nf\sin\varphi = P + T - \varpi, \\ Pr - Tr - Nf\rho = o, \end{array}\right. \\ \text{CHAPE..} & \left\{\begin{array}{l} N\cos\varphi + Nf\sin\varphi = Q, \\ Nf(\rho + \Delta) - Qq = o, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

lesquelles serviront à déterminer les cinq inconnues φ, N, P, T, q. On tire de la première,

$$(4)\qquad \tan\varphi = f.$$

Élevant au carré les deux premières, et les ajoutant ensuite, on obtient

$$N = \frac{P + T - \varpi}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

La comparaison de la seconde et de la quatrième équation donne

$$P + T - \varpi = Q,$$

d'où

$$T = Q + \varpi - P.$$

Alors la valeur de N devient

$$(5)\qquad N = \frac{Q}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Substituant dans la troisième des équations (3) les valeurs ci-dessus de T et de N on trouve

$$(6)\qquad P = \frac{1}{2}(Q + \varpi) + \frac{Qf\rho}{2r\sqrt{1+f^2}}.$$

Substituant dans T cette valeur de P, on obtient

$$(7)\qquad T = \frac{1}{2}(Q + \varpi) - \frac{Qf\rho}{2r\sqrt{1+f^2}}.$$

On tire enfin de la cinquième équation

$$(8)\qquad q = \frac{f(\rho + \Delta)}{\sqrt{1+f^2}} = f(\rho + \Delta),$$

à très-peu près.

Cette dernière valeur montre que l'axe de la chape déviera très-peu de la direction verticale.

Si, par exemple, on suppose

$$f = 0{,}13, \quad \rho = 0^{m}{,}02, \quad \Delta = 0^{m}{,}01,$$

on trouve

$$q = 0^{m}{,}0039.$$

On déduit aussi sans peine des équations précédentes

$$(9)\qquad P = \frac{r\sqrt{1+f^2}+f\rho}{r\sqrt{1+f^2}-f\rho}\,T - \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}-f\rho}\,\varpi.$$

Cette valeur de P en fonction de la tension T nous sera utile dans la suite.

Si l'on divise par Q les deux membres de l'équation (6), elle devient

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} + \frac{f\rho}{2r\sqrt{1+f^2}} + \frac{1}{2}\frac{\varpi}{Q},$$

laquelle montre qu'il y a *économie de force motrice à soulever, avec la poulie mobile, de grandes charges*. On voit aussi qu'*il est avantageux d'employer de petits tourillons*.

Pour donner une application numérique de la formule (2), supposons qu'avec une poulie en fonte de 10 kilogrammes et d'un rayon de $0^{m}{,}20$, on veuille soulever un poids de 200 kilo

grammes. Le rayon du tourillon étant supposé de $0^m,03$, afin d'exagérer l'influence du frottement, on aura

$$\varpi = 10^k,\quad Q = 200^k,\quad r = 0^m,20,\quad \rho = 0^m,03,\quad f = 0,13,$$

et par suite la formule citée donnera

$$P = 208^k \text{ environ.}$$

Le frottement exige donc une augmentation de force de 8 kilogrammes.

Écrivons la formule (2) sous la forme

$$P = Q\frac{r\sqrt{1+f^2}+f\rho}{r\sqrt{1+f^2}-f\rho} + \varpi\frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}-f\rho}.$$

Effectuant la division dans les coefficients de Q et de ϖ, et négligeant les termes du quatrième ordre par rapport à f, ρ, on trouve

$$\frac{r\sqrt{1+f^2}+f\rho}{r\sqrt{1+f^2}-f\rho} = 1 + 2\frac{f\rho}{r},\qquad \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}-f\rho} = \frac{f\rho}{r},$$

par suite la valeur de P devient

$$(10)\qquad P = Q + \frac{f\rho}{r}(\varpi + 2Q),$$

laquelle pourra être employée lorsque la charge ne sera pas trop considérable.

Avec les données de l'exemple précédent, la formule (10) donne

$$P = 207^k,995.$$

THÉORIE DU TREUIL.

34. Faisons d'abord abstraction du frottement.

Nommant R le rayon de la roue (*fig.* 64), r celui du cylindre, les moments des forces P et Q, par rapport à l'axe de rotation, devront être égaux, et l'on aura

$$(1)\qquad PR = Qr,\quad \text{d'où}\quad \frac{P}{Q} = \frac{r}{R};$$

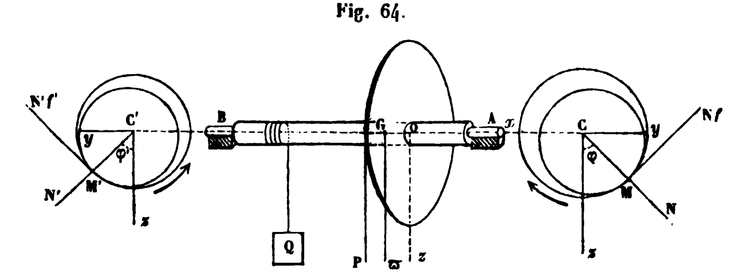
ce qui fait voir que, dans l'équilibre du tour, *la puissance*

est à la résistance, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue alors qu'on n'a pas égard au frottement.

Tenons compte maintenant de cette dernière force.

Soient ϖ le poids du tour, ρ, ρ' les rayons des tourillons, et

Fig. 64.



N, N' les pressions que ceux-ci exercent sur les coussinets aux points où se fait la rotation. (Pour l'intelligence de la démonstration nous avons représenté de chaque côté une section droite de chaque tourillon et coussinet, avec l'indication des forces correspondantes.) Chaque coussinet développera une réaction égale et contraire à la pression qu'il supporte, de sorte que le treuil sera sollicité par les forces ci-après :

1°. La puissance P;

2°. La résistance Q;

3°. Le poids ϖ de la machine;

4°. La réaction N dirigée de M vers C;

5°. Le frottement Nf agissant en sens inverse du mouvement;

6°. La réaction normale N';

7°. La frottement $N'f$.

Pour trouver les conditions d'équilibre de ces forces, menons par le centre O de la roue trois axes rectangulaires. Deux de ces axes Ox, Oz sont marqués sur la figure, le troisième, ou l'axe des y, est perpendiculaire à son plan. Or, puisqu'on a égard aux réactions exercées par les coussinets, le treuil peut être regardé comme étant entièrement libre; alors, pour l'équilibre, il faut et il suffit : 1° que la somme des composantes parallèles à chaque axe soit nulle; 2° que la somme

de leurs moments par rapport aux mêmes axes soit aussi nulle. Pour former les équations de l'équilibre, il faut d'abord décomposer les forces ci-dessus parallèlement à chaque axe, et l'on formera ainsi le tableau suivant :

	COMPOSANTES.	COORDONNÉES des points d'applications.
N	$X = o$,	$x = OA = l$,
	$Y = -N\sin\varphi$,	$y = \rho\sin\varphi$,
	$Z = -N\cos\varphi$.	$z = \rho\cos\varphi$.
N′	$X = o$,	$x = -OB = -l'$,
	$Y = -N'\sin\varphi'$,	$y = \rho'\sin\varphi'$,
	$Z = -N'\cos\varphi'$.	$z = \rho'\cos\varphi'$.
Nf	$X = o$,	$x = l$,
	$Y = Nf\cos\varphi$,	$y = \rho\sin\varphi$,
	$Z = -Nf\sin\varphi$.	$z = \rho\cos\varphi$.
N′f	$X = o$,	$x = -l'$,
	$Y = N'f\cos\varphi'$.	$y = \rho'\sin\varphi'$,
	$Z = -N'f\sin\varphi'$,	$z = \rho'\cos\varphi'$.
P	$X = o$,	$x = o$,
	$Y = o$,	$y = R$,
	$Z = P$.	$z = o$.
Q	$X = o$,	$x = -q$,
	$Y = o$,	$y = -r$,
	$Z = Q$.	$z = o$.
ϖ	$X = o$,	$x = -OG = -u$,
	$Y = o$,	$y = o$,
	$Z = \varpi$.	$z = o$.

Maintenant si l'on substitue ces valeurs dans les équations (7) du n° 18, après les avoir mises sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o, \\ \Sigma(yZ - zY) = o, \\ \Sigma(zX - xZ) = o, \\ \Sigma(xY - yX) = o, \end{array}\right.$$

on est conduit aux cinq équations

(3) $N(\sin\varphi - f\cos\varphi) = -N'(\sin\varphi' - f\cos\varphi')$,

(4) $P + Q + \varpi = N(\cos\varphi + f\sin\varphi) + N'(\cos\varphi' + f\sin\varphi')$,

(5) $PR - Qr = Nf\rho + N'f\rho'$,

(6) $N'l'(\cos\varphi' + f\sin\varphi') - Nl(\cos\varphi + f\sin\varphi) = Qq + \varpi u$,

(7) $Nl(\sin\varphi - f\cos\varphi) = N'l'(\sin\varphi' - f\cos\varphi')$,

entre les cinq inconnues $P, N, N', \varphi, \varphi'$.

Remarquons d'abord que les équations (3) et (7) ne contenant que les réactions développées par les coussinets, sont indépendantes, dans leur forme, de la position des forces données, pourvu qu'elles soient verticales; de sorte qu'elles entreront dans les équations du mouvement uniforme du treuil, quel que soit le mode d'action des forces.

La deuxième de ces équations fait voir que, suivant qu'on aura

$$\sin\varphi - f\cos\varphi = 0, \quad > 0 \quad \text{ou} \quad < 0,$$

on aura aussi

$$\sin\varphi' - f\cos\varphi' = 0, \quad > 0 \quad \text{ou} \quad < 0.$$

Cela posé, si l'on divise membre à membre les deux équations citées, on trouve

$$l = -l',$$

ce qui est absurde; d'où il faut conclure que le mouvement uniforme du treuil, et généralement de toute roue à axe horizontal, sollicitée par des forces verticales, n'est possible qu'autant que

$$\sin\varphi - f\cos\varphi = 0,$$

ce qui donne

$$\sin\varphi' - f\cos\varphi' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\tang\varphi = \tang\varphi' = f \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi'.$$

Maintenant si l'on observe que

$$\cos\varphi + f\sin\varphi = \sqrt{1 + f^2},$$

les équations ci-dessus deviennent

$$(8)\qquad \begin{cases} \tang \varphi = f, \\ P + Q + \varpi = (N + N')\sqrt{1+f^2}, \\ PR - Qr = Nf\rho + N'f\rho', \\ Qq + \varpi u = (N'l' - Nl)\sqrt{1+f^2}, \end{cases}$$

lesquelles étant résolues donnent

$$(9)\quad N\sqrt{1+f^2} = \frac{l'\sqrt{1+f^2}[Q(R+r)+R\varpi] - (Qq+\varpi u)(R\sqrt{1+f^2}-f\rho')}{l(R\sqrt{1+f^2}-f\rho') + l'(R\sqrt{1+f^2}-f\rho)},$$

$$(10)\quad N'\sqrt{1+f^2} = \frac{l\sqrt{1+f^2}[Q(R+r)+R\varpi] + (Qq+\varpi u)(R\sqrt{1+f^2}-f\rho)}{l(R\sqrt{1+f^2}-f\rho') + l'(R\sqrt{1+f^2}-f\rho)},$$

$$(11)\quad P = \frac{Qr\sqrt{1+f^2}(l+l') + f(Q+\varpi)(l\rho'+l'\rho) + f(Qq+\varpi u)(\rho'-\rho)}{l(R\sqrt{1+f^2}-f\rho') + l'(R\sqrt{1+f^2}-f\rho)}.$$

Si l'on effectue la division, et qu'on néglige les termes du quatrième ordre par rapport à f, ρ, ρ', on trouve la formule approchée

$$(12)\qquad P = Q\frac{r}{R} + \frac{f(l\rho'+l'\rho)\left(Q+\varpi+\frac{r}{R}Q\right) + f(\rho'-\rho)(Qq+\varpi u)}{(l+l')R}.$$

Si l'on y fait $\rho' = \rho$, ce qui est le cas le plus ordinaire de la pratique, elle se réduit à

$$P = Q\frac{r}{R} + \frac{f\rho}{R}\left[\varpi + Q\left(1+\frac{r}{R}\right)\right].$$

Dans l'hypothèse de $\rho' = \rho$, la valeur exacte de P est

$$(12\ bis)\qquad P = \frac{Q(r\sqrt{1+f^2}+f\rho) + \varpi f\rho}{R\sqrt{1+f^2} - f\rho}.$$

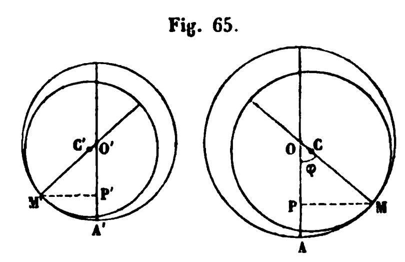
Nous venons de voir que le mouvement uniforme du treuil n'est possible qu'autant que

$$\varphi = \varphi'.$$

Comme l'axe de la machine doit rester horizontal pendant le



Fig. 65.



déplacement des deux tourillons qui s'élèvent en M et M' (*fig.* 65), on aura

$$AP = A'P'.$$

Mais

$$AP = OA(1 - \cos\varphi), \quad \text{et} \quad AP' = O'A'(1 - \cos\varphi),$$

par suite

$$OA = O'A'.$$

Ce qui fait voir que *le mouvement uuiforme d'une roue à axe horizontal sollicitée par des forces verticales, n'est rigoureusement possible qu'autant que les deux tourillons tournent dans des coussinets de même rayon.*

Si dans l'équation (11) on néglige les termes affectés de $f\rho$, $f\rho'$, elle se réduit à

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R};$$

de sorte que *dans le treuil on peut négliger les frottements, toutes les fois que la charge et le poids de la machine sont peu considérables.*

Pour donner une application numérique de la formule (12 *bis*) supposons

$$R = 1^m,5, \quad r = 0^m,10, \quad \rho = 0^m,08, \quad Q = 2000^k, \quad \varpi = 400, \quad f = 0,13;$$

et l'on trouve

$$P = 136^k,396.$$

En n'ayant pas égard au frottement, on obtient

$$P = 133^k,33;$$

le frottement n'a donc absorbé que $3^k,066$ de force motrice, quoique nous ayons exagéré le rayon du tourillon.

Ecrivons l'équation (12 *bis*) sous la forme

$$(13) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{r\sqrt{1+f^2} + f\rho}{R\sqrt{1+f^2} - f\rho} + \frac{f\rho}{R\sqrt{1+f^2} - f\rho}\,\frac{\varpi}{Q};$$

et l'on voit que la valeur de $\frac{P}{Q}$ se compose d'une partie constante et d'une partie variable avec Q. Or plus Q sera grand, plus le second terme sera petit, par suite $\frac{P}{Q}$ s'approchera indéfiniment de la limite fixe

$$(14) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{r\sqrt{1+f^2}+f\rho}{R\sqrt{1+f^2}-f\rho},$$

qui sera sa valeur minima.

D'où il résulte qu'*il y a économie de force motrice à soulever avec le treuil de grandes charges.*

Si l'on compare le travail moteur au travail utile pour un tour entier du treuil, on aura

$$T_m = 2\pi RP, \quad T_u = 2\pi rQ,$$

d'où

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{r}{R}\frac{Q}{P}.$$

Remplaçant $\frac{Q}{P}$ par sa valeur tirée de l'équation (13) il vient

$$(15) \qquad \frac{T_u}{T_m} = \frac{r}{R}\,\frac{R\sqrt{1+f^2}-f\rho}{r\sqrt{1+f^2}+f\rho+f\rho\,\frac{\varpi}{Q}} = 1 - \frac{f\rho}{r}\left(1+\frac{r}{R}+\frac{\varpi}{Q}\right),$$

aux quantités près du quatrième ordre par rapport à f, ρ; d'où il résulte que $\frac{T_u}{T_m}$ augmente à mesure que Q augmente, en s'approchant indéfiniment de la limite supérieure

$$(16) \qquad \frac{T_u}{T_m} = \frac{r}{R}\,\frac{R\sqrt{1+f^2}-f\rho}{r\sqrt{1+f^2}+f\rho} = 1 - \frac{f\rho}{r}\left(1+\frac{r}{R}\right),$$

au même degré d'approximation que ci-dessus.

Ainsi, *non-seulement il y a économie de force motrice à soulever de grandes charges avec le treuil, mais encore le rendement est plus considérable.*

En introduisant dans la formule (15) les données de l'exemple



précédent, on trouve

$$\frac{T_u}{T_m} = 0,88.$$

Dans la même hypothèse, la formule (16) donne

$$\frac{T_u}{T_m} = 0,91.$$

Les formules (9) et (10) peuvent servir à déterminer le travail absorbé par les frottements sur les coussinets. Supposons, par exemple, qu'on veuille obtenir ce travail dans le cas de $Q = 0$. Si l'on néglige dans les équations citées les termes du troisième ordre par rapport à f, ρ, ρ', il vient, en posant $l + l' = \lambda$,

(17) $$Nf = \frac{\varpi (l' - u)}{\lambda} f,$$

(18) $$N'f = \frac{\varpi (l + u)}{\lambda} f.$$

Les travaux, dus à ces frottements, seront, pour un tour entier de la roue,

$$\mathfrak{T} = \frac{\varpi (l' - u)}{\lambda} 2\pi f \rho,$$

$$\mathfrak{T}' = \frac{\varpi (l + u)}{\lambda} 2\pi f \rho',$$

et, en posant comme au nº 13, $l' - u = a$, $l + u = b$,

$$\mathfrak{T} = \frac{\varpi a}{\lambda} 2\pi f \rho,$$

$$\mathfrak{T}' = \frac{\varpi b}{\lambda} 2\pi f \rho'.$$

Remplaçant $\frac{\varpi a}{\lambda}$, $\frac{\varpi b}{\lambda}$, par leurs valeurs (5) et (6) du même numéro, les valeurs de $\mathfrak{T}$ et de $\mathfrak{T}'$ deviennent

$$\mathfrak{T} = 2\pi f \rho P', \quad \mathfrak{T}' = 2\pi f \rho' P;$$

ajoutant ces équations membre à membre, et nommant T le travail total absorbé par le frottement dû au poids de la machine,

on trouve en définitive

$$T = 2\pi f(P'\rho + P\rho'),$$

ce qui est la formule du n° 13; car ici, comme au numéro cité, chaque pression est multipliée par le rayon du tourillon correspondant.

Le travail absorbé pendant un tour entier de la roue a pour valeur, en tenant compte de la charge, et au même degré d'approximation que ci-dessus,

$$(19)\quad T = 2\pi f \frac{(\rho l' + \rho' l)\,[Q(R+r) + R\varpi] - R(\rho - \rho')(Qq + \varpi u)}{R(l + l')}.$$

En adoptant les données numériques des exemples précédents, et supposant de plus

$$l = 0^{m},90, \quad l' = 0^{m},10, \quad \rho' = 0,06, \quad u = 0^{m},20,$$

on trouve

$$T = 138,097 \text{ kilogrammètres.}$$

Si la force P est destinée à empêcher le mouvement de s'accélérer, elle deviendra la résistance et Q la puissance ; il faut donc changer dans l'équation (12 *bis*) P en Q, Q en P, et l'on aura, en résolvant ensuite l'équation résultante par rapport à P,

$$(20)\qquad P = \frac{Q(R\sqrt{1+f^2} - f\rho) - \varpi f\rho}{r\sqrt{1+f^2} + f\rho}.$$

Si dans l'équation précédente on prend le rapport de P à Q, il vient

$$(21)\qquad \frac{P}{Q} = \frac{R\sqrt{1+f^2} - f\rho}{r\sqrt{1+f^2} + f\rho} - \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2} + f\rho}\,\frac{\varpi}{Q}.$$

Cette équation montre qu'*il y a économie de force motrice à mouvoir de petites charges*, attendu que $\frac{P}{Q}$ diminue en même temps que Q.

La moindre valeur de P répondra au cas où le second membre sera nul, ce qui donnera pour la charge,

$$(22)\qquad Q = \frac{f\rho}{R\sqrt{1+f^2} - f\rho}\,\varpi.$$



Donc, *quand la charge du tour aura la valeur ci-dessus, le frottement seul suffira pour empêcher le mouvement de s'accélérer.*

La formule citée montre que la charge à mouvoir sera d'autant plus grande que R sera plus petit, et que ρ et ϖ seront plus grands. Donc *si un treuil était uniquement destiné à descendre des fardeaux, il serait avantageux de donner à la roue un petit diamètre, d'employer de grands tourillons, et de donner beaucoup de poids à la machine.*

Si l'on supprime la roue du treuil, R deviendra le rayon du cylindre; et en même temps si dans la formule (22) on fait

$$R = K\rho,$$

on aura

$$(23)\qquad Q = \frac{\varpi f}{K\sqrt{1+f^2}-f}.$$

Si, par exemple, on suppose

$$\varpi = 1000^k,\quad K = 2,\quad f = 0,13,$$

on trouve

$$Q = 68^k,63 \text{ environ}.$$

De sorte que les frottements des tourillons du cylindre sur les coussinets suffiront pour entretenir le mouvement uniforme de la charge ci-dessus.

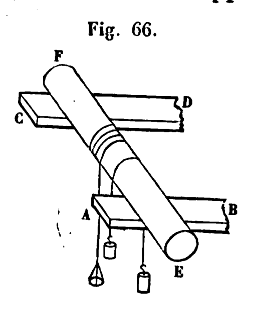
NEUVIÈME LEÇON.

TRANSPORT DES CORPS SUR UN PLAN HORIZONTAL.

FROTTEMENT DE ROULEMENT; SES CAUSES.

35. Soient deux madriers AB, CD (*fig.* 66), parallèles et assujettis sur deux supports de même hauteur. Un rouleau EF posé sur les deux madriers est chargé de deux poids égaux suspendus à l'extrémité d'un fil. Un second fil enroulé sur le cylindre et portant un léger plateau est destiné à recevoir des poids. Le système étant en équilibre, on charge successivement le plateau de très-petits poids, jusqu'à produire un léger déplacement du rouleau ; à ce moment *la résistance au roulement (ou le frottement de roulement) est sensiblement égale au poids du plateau et de sa charge.* Coulomb a trouvé de la sorte que le frottement de roulement est proportionnel à *la charge des madriers et en raison inverse du diamètre du rouleau.* Par conséquent, si l'on nomme F cette force, R le rayon du rouleau, on aura

Fig. 66.



$$(1) \qquad F = \mu \frac{Q}{2R}.$$

μ est un coefficient qui dépend de la nature des surfaces frottantes. Ordinairement la résistance au roulement s'estime par une force horizontale, appliquée à la partie supérieure du rouleau.

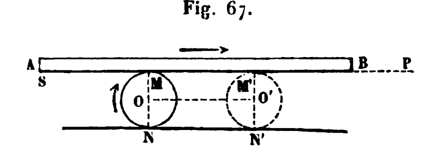
Les causes de la résistance au roulement sont faciles à sai-

sir. D'abord les aspérités des surfaces forment un premier obstacle; en second lieu, il se produit au contact un certain affaissement, qui oblige le rouleau à monter à chaque instant comme sur un petit plan incliné.

TRANSPORT SUR DES ROULEAUX; RAPPORT DES ESPACES PARCOURUS PAR LE MADRIER ET LE ROULEAU.

Soit un madrier AB (*fig.* 67), posé sur un rouleau MN et tiré par une force P, agissant suivant la tangente MB. Pour produire le mouvement uniforme du cylindre, la force P devra évidemment être égale à la somme des résistances au roulement qui naissent en M et en N. Nommant p et p' ces deux forces, P leur somme, on aura successivement

Fig. 67.



$$p = \mu \frac{Q}{2R}, \quad p' = \mu' \frac{Q + Q'}{2R},$$

en nommant Q la pression du madrier sur le rouleau, Q' et R le poids et le rayon du rouleau; μ et μ' sont des coefficients qui dépendent : le premier de la nature du madrier et du rouleau, le deuxième de la nature du rouleau et du sol. Ajoutant ces deux équations membre à membre, on en tire

$$(2) \qquad P = \frac{\mu Q + \mu'(Q + Q')}{2R}.$$

Les coefficients μ et μ' se déterminent par l'expérience.

L'espace parcouru par le madrier est double de celui parcouru par le rouleau. Supposons que le rouleau se soit avancé jusqu'en M'N'. Prenons MS = OO', et regardons d'abord le rouleau comme fixe. Cela étant, si l'on tire le madrier jusqu'à faire arriver le point S en M, le point M viendra occuper la position M'. Mais le rouleau étant mobile et s'étant transporté en M'N', le point S est maintenant en M'. Donc pen-

dant que le rouleau parcourra l'espace OO′, le point S du madrier décrira l'espace double SM′. C. Q. F. D.

Ordinairement on emploie deux rouleaux au lieu d'un seul, sans quoi il faudrait soutenir le madrier horizontalement; mais le résultat est le même. En effet, nommons T et T′ les tractions dues à la résistance de chaque rouleau, q et q' les charges qu'ils supportent, on aura, en nommant toujours Q′ le poids d'un rouleau,

$$T = \frac{\mu q + \mu'(q + Q')}{2R},$$

$$T' = \frac{\mu q' + \mu'(q' + Q')}{2R};$$

ajoutant ces deux égalités membre à membre et posant

$$q + q' = Q, \qquad T + T' = P,$$

il vient

$$P = \frac{\mu Q + \mu'(Q + Q')}{2R},$$

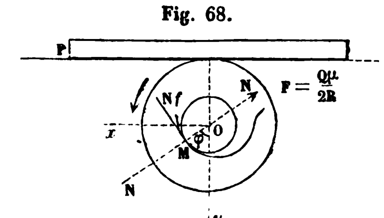
ce qui est la formule ci-dessus, mais avec cette différence que Q désigne ici le poids du madrier, Q′ la somme des poids des rouleaux.

FROTTEMENT SUR LES GALETS.

Un galet est une petite roue sur laquelle on fait glisser soit une courroie, soit une tige, afin de diminuer le frottement.

Soit donc une tige glissant sur le galet O (*fig.* 68) d'un mouvement uniforme; il s'agit de déterminer la force P capable de vaincre les frottements qui naissent du mouvement de la tige sur le galet, et du glissement du tourillon sur les coussinets. Pour cela, soit Q la pression que la tige exerce sur le galet; le frottement

Fig. 68.







qui en résulte aura pour valeur

$$F = \frac{Q\mu}{2R}.$$

Soient Q′ le poids du galet et N la pression qu'il exerce sur le coussinet; cette pression produira : 1° une réaction égale et contraire sur le tourillon; 2° un frottement Nf dirigé comme on l'a marqué sur la figure. Le galet sera donc soumis à l'action des forces P, — F, N, Nf. En ayant égard à toutes ces forces, on pourra le regarder comme libre; et l'on aura, en prenant le point O pour centre des moments,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &Nf\cos\varphi - N\sin\varphi + P - \frac{Q\mu}{2R} = 0,\\ &N\cos\varphi + Nf\sin\varphi - (Q + Q') = 0,\\ &\left(P - \frac{Q\mu}{2R}\right)R - Nf\rho = 0,\end{aligned}\right.$$

lesquelles serviront à déterminer les trois inconnues N, φ, P. Si l'on élève au carré les deux premières, après avoir fait passer les quantités connues au second membre, on trouve, en les ajoutant,

$$(4)\qquad N = \sqrt{\frac{(Q+Q')^2 + \left(P - \frac{Q\mu}{2R}\right)^2}{1+f^2}}.$$

Divisant ensuite les mêmes équations, on en tire

$$(5)\qquad \tan\varphi = \frac{f(Q+Q') + P - \frac{Q\mu}{2R}}{Q + Q' - f\left(P - \frac{Q\mu}{2R}\right)}.$$

Enfin, on déduit de la dernière,

$$(6)\qquad P = \frac{Q\mu}{2R} + \frac{f\rho(Q+Q')}{\sqrt{R^2(1+f^2) - f^2\rho^2}}.$$

La valeur de P peut s'écrire sous la forme

$$P = \frac{Q\mu}{2R} + \frac{f\rho(Q+Q')}{R\sqrt{1+f^2}}\left(1 - \frac{f^2\rho^2}{R^2(1+f^2)}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Mais on a, à très-peu près,

$$\left(1-\frac{f^2\rho^2}{R^2\sqrt{1+f^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{f^2\rho^2}{R^2\sqrt{1+f^2}};$$

par suite la valeur de P devient, en négligeant les termes du quatrième ordre par rapport à f et ρ,

$$(7)\qquad P=\frac{Q\mu}{2R}+\frac{f\rho(Q+Q')}{R\sqrt{1+f^2}}.$$

On a ensuite, au même degré d'approximation,

$$(8)\qquad N=\frac{Q+Q'}{\sqrt{1+f^2}};$$

et enfin, aux termes près du deuxième ordre par rapport aux mêmes quantités,

$$\tang \varphi = f.$$

Si, par exemple, $f=0,13$,

$$\varphi = 7^\circ 24' 25''.$$

Si la tige glisse sur plusieurs galets, et qu'on nomme q et q' les pressions qu'elle exerce respectivement sur chacun, p et p', etc., les forces horizontales nécessaires pour vaincre les frottements, on aura

$$p=\frac{q\mu}{2R}+\frac{(q+Q')f\rho}{\sqrt{R^2(1+f^2)-f^2\rho^2}}.$$

$$p'=\frac{q'\mu}{2R}+\frac{(q'+Q')f\rho}{\sqrt{R^2(1+f^2)-f^2\rho^2}}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et nommant P la traction totale, Q le poids de la tige supposée soutenue par les galets dans toutes ses positions, il vient

$$P=\frac{Q\mu}{2R}+\frac{(Q+Q')f\rho}{\sqrt{R^2(1+f^2)-f^2\rho^2}},$$

ce qui est la même formule que ci-dessus, mais avec cette différence que Q désigne ici le poids de la tige, Q' la somme des poids des galets.



Si l'on remarque maintenant que la tige doit toujours demeurer horizontale en s'appuyant sur tous les galets, l'angle φ sera le même pour chacun, et l'équation (5) deviendra, en chassant les dénominateurs, et l'appliquant à chaque galet,

$$\operatorname{tang}\varphi\left[q + Q' - f\left(p - \frac{q\mu}{2R}\right)\right] = f(q + Q') + p - \frac{q\mu}{2R},$$

$$\operatorname{tang}\varphi\left[q' + Q' - f\left(p' - \frac{q'\mu}{2R}\right)\right] = f(q' + Q') + p' - \frac{q'\mu}{2R}.$$

. . . .

Ajoutant ces équations membre à membre et résolvant par rapport à tang φ, on retrouve l'équation (5), dans laquelle Q est maintenant le poids de la tige, Q' la somme des poids des galets. Quant à la valeur de N, elle peut évidemment varier d'un galet à l'autre.

Si de la valeur de tang φ on élimine $P - \frac{Q\mu}{2R}$, on trouve

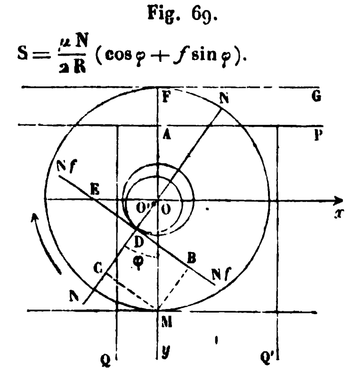
$$(9) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{f + \dfrac{f\rho}{\sqrt{R^2(1+f^2) - f^2\rho^2}}}{1 - \dfrac{f^2\rho^2}{\sqrt{R^2(1+f^2) - f^2\rho^2}}}.$$

DU TRANSPORT HORIZONTAL A L'AIDE DES VOITURES.

36. Soient Q la charge de la voiture, y compris son poids, et Q' celle d'un contre-poids placé dans le voisinage des brancards destiné à maintenir le système dans une position horizontale. N étant la pression normale au point D où se fait la rotation, il naîtra de cette pression un double frottement Nf qui pour l'essieu agira de D vers E, pour la roue de D vers B. La réaction de la roue sur l'essieu sera dirigée de D vers O, tandis que la pression de l'essieu sur la roue agira de D vers

Fig. 69.

$$S = \frac{\mu N}{2R}(\cos\varphi + f\sin\varphi).$$



C. Cela posé, les forces qui sollicitent l'essieu sont :

$$P, \quad Q, \quad Q', \quad N \quad \text{et} \quad Nf.$$

Pour l'équilibre, et par conséquent pour le mouvement uniforme, il faut que la somme des composantes de ces forces parallèles à chacun des axes Ox, Oy soit nulle, et que la somme de leurs moments relatifs à l'axe de l'essieu soit aussi nulle. Nommant ρ le rayon de l'essieu, Δ la distance OO', on aura les trois équations

$$P = Nf\cos\varphi - N\sin\varphi,$$
$$Q + Q' = Nf\sin\varphi + N\cos\varphi,$$
$$P(p + \Delta\cos\varphi) - Q(q - \Delta\sin\varphi) + Q'(q' + \Delta\sin\varphi) + Nf\rho = 0.$$

Remarquons, avant d'aller plus loin, que pour vaincre la résistance au roulement, il faudrait appliquer en F, et suivant FG, une force $S = \frac{\mu N'}{2R}$, N' étant la pression normale au sol exercée par la roue. Mais les forces qui sollicitent la roue sont N et Nf; donc on aura

(1) $$N' = N\cos\varphi + Nf\sin\varphi :$$

par suite la force nécessaire pour vaincre le frottement de roulement sera

(2) $$S = \frac{\mu N}{2R}(\cos\varphi + f\sin\varphi).$$

En appliquant la force S suivant le prolongement de FG, on pourra faire abstraction de la résistance au roulement, et comme les forces N, Nf, S tendent à faire tourner la roue autour du point S, la somme de leurs moments, par rapport à ce point, devra être nulle, ce qui donne

$$S.2R + N.MC - Nf.MB = 0.$$

Mais

$$S = \frac{\mu N}{2R}(\cos\varphi + f\sin\varphi),$$
$$MC = R\sin\varphi,$$
$$MB = R\cos\varphi - \rho - \Delta;$$

par suite, l'équation ci-dessus devient

$$R\sin\varphi - f(R\cos\varphi - \rho - \Delta) + \mu(\cos\varphi + f\sin\varphi) = 0.$$

Si l'on observe maintenant que l'on a, en vertn de l'équilibre des forces Q et Q',

$$Q\,(q - \Delta \sin\varphi) = Q'\,(q' + \Delta \sin\varphi),$$

l'équilibre du système sera exprimé par les quatre équations

$$(3)\quad \begin{cases} P = Nf\cos\varphi - N\sin\varphi, \\ Q + Q' = Nf\sin\varphi + N\cos\varphi, \\ P\,(p + \Delta\cos\varphi) + Nf\rho = 0, \\ R\sin\varphi + \mu\,(\cos\varphi + f\sin\varphi) = f(R\cos\varphi - \rho - \Delta), \end{cases}$$

lesquelles serviront à déterminer les quatre inconnues φ, P, N, p.

Si dans la dernière des équations (3) on néglige le terme du troisième ordre par rapport à μ, f, φ qui sont de petites quantités, il vient

$$R\sin\varphi + \mu\cos\varphi = fR\cos\varphi - f(\rho + \Delta).$$

Divisant par $\cos\varphi$, on trouve

$$R\,\text{tang}\,\varphi + \mu = fR - \frac{f(\rho + \Delta)}{\cos\varphi}.$$

Remplaçant $\cos\varphi$ par sa valeur,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\varphi}},$$

l'équation précédente prend la forme

$$R\,\text{tang}\,\varphi + \mu = fR - f(\rho + \Delta)\sqrt{1 + \text{tang}^2\varphi}.$$

Mais aux quantités près du quatrième ordre par rapport à $\text{tang}\,\varphi$, on a

$$\sqrt{1 + \text{tang}^2\varphi} = 1 + \frac{1}{2}\,\text{tang}^2\varphi;$$

donc

$$R\,\text{tang}\,\varphi + \mu = fR - f(\rho + \Delta)\left(1 + \frac{1}{2}\,\text{tang}^2\varphi\right).$$

Négligeant le terme du quatrième ordre par rapport aux quantités f, $\rho + \Delta$, $\text{tang}\,\varphi$, on trouve

$$R\,\text{tang}\,\varphi + \mu = fR - f(\rho + \Delta),$$

d'où l'on tire

$$(4)\qquad \text{tang}\,\varphi = \frac{Rf - \mu - f(\rho + \Delta)}{R}.$$

Cette équation fait voir que suivant qu'on aura

$$f > \frac{\mu}{R - \rho - \Delta} \quad \text{ou} \quad f < \frac{\mu}{R - \rho - \Delta},$$

le point où se fait la rotation sera situé du côté opposé ou dans la direction du mouvement. Le premier cas a lieu sur les chemins de fer, le deuxième sur les routes ordinaires.

Pour déterminer P, divisons membre à membre les deux premières équations, on obtient ainsi

$$\frac{P}{Q + Q'} = \frac{f \cos \varphi - \sin \varphi}{f \sin \varphi + \cos \varphi}.$$

Divisant numérateur et dénominateur par $\cos \varphi$, il vient

$$\frac{P}{Q + Q'} = \frac{f - \operatorname{tang} \varphi}{f \operatorname{tang} \varphi + 1}.$$

Remplaçant $\operatorname{tang} \varphi$ par sa valeur précédente, on trouve

$$\frac{P}{Q + Q'} = \frac{\mu + f(\rho + \Delta)}{R + f(Rf - \mu) - f^2(\rho + \Delta)}.$$

Effectuant la division, et négligeant les termes du troisième ordre par rapport aux quantités $\mu, f, \rho + \Delta$, on obtient

$$\frac{P}{Q + Q'} = \frac{\mu}{R} + \frac{f(\rho + \Delta)}{R},$$

d'où l'on tire

$$P = (Q + Q')\left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right),$$

et plus simplement

(5) $$P = Q\left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right),$$

en nommant Q la charge totale.

On ne calcule pas les autres inconnues qui offrent un intérêt moindre. On voit que, pour une même charge, P sera d'autant plus petit que le rayon R de la roue sera plus grand, et que le rayon $\rho + \Delta$ de la boîte sera moindre; quant au coefficient μ, il dépend de l'état de la voie. Il dépend aussi de la largeur des bandes de la roue, car on a reconnu que cette largeur





doit être dans un certain rapport avec la charge à transporter, afin d'éviter une trop grande dépression du sol.

VOITURES A QUATRE ROUES.

Supposons que R, ρ et Δ se rapportent à la grande roue, et nommons R', ρ', Δ' des quantités analogues relatives à la petite roue. Si l'on nomme p, p' les tractions horizontales nécessaires pour vaincre les frottements de chaque système de roues, q, q' les charges qu'elles supportent, on aura

$$p = q\left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right), \quad p' = q'\left(\frac{\mu}{R'} + f\frac{\rho' + \Delta'}{R'}\right),$$

et en ajoutant ces équations membre à membre

$$(6) \qquad P = q\left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right) + q'\left(\frac{\mu}{R'} + f\frac{\rho' + \Delta'}{R'}\right).$$

Si $q = q' = \frac{1}{2}Q$, la valeur de P devient

$$(7) \qquad P = \frac{1}{2}Q\left[\mu\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + f\left(\frac{\rho + \Delta}{R} + \frac{\rho' + \Delta'}{R'}\right)\right].$$

Si l'on a $R = R'$, $\rho = \rho'$, $\Delta = \Delta'$, comme cela a lieu pour les wagons, la formule précédente se transforme dans la formule (5) qui convient ainsi aux voitures à deux roues, et aux wagons des chemins de fer.

VOITURES A SIX ROUES.

Pour une voiture à six roues, entre lesquelles la charge serait également répartie, on aurait de même

$$(8) \qquad P = \frac{1}{3}Q\left[\mu\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) + f\left(\frac{\rho + \Delta}{R} + \frac{\rho' + \Delta'}{R'} + \frac{\rho'' + \Delta''}{R''}\right)\right];$$

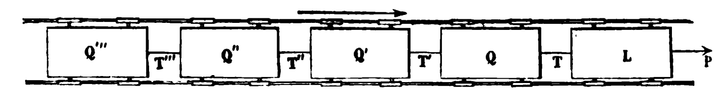
et ainsi de suite.

TIRAGE D'UNE LOCOMOTIVE.

Soit L le poids de la locomotive que nous supposerons avoir six roues, deux grandes et quatre petites; soient aussi

$Q, Q', \ldots, Q'''$ les poids des wagons y compris leur charge.

Fig. 70.



Nommant P l'effort parallèle aux rails développé par la machine, $T, T', \ldots, T'''$ les tensions des chaînes qui lient un wagon à un autre, on aura successivement, en vertu des formules (8) et (5) :

Pour la locomotive, et en faisant abstraction *du frottement développé sur le bouton de la manivelle* :

$$P = \frac{1}{3} L \left[\mu \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) + f \left(\frac{\rho + \Delta}{R} + \frac{\rho' + \Delta'}{R'} + \frac{\rho'' + \Delta''}{R''} \right) \right] + T;$$

Pour les wagons, successivement

$$T = Q \left(\frac{\mu}{R_1} + f \frac{\rho_1 + \Delta_1}{R_1} \right) + T',$$

$$T' = Q' \left(\frac{\mu}{R_1} + f \frac{\rho_1 + \Delta_1}{R_1} \right) + T'',$$

$$T'' = Q'' \left(\frac{\mu}{R_1} + f \frac{\rho_1 + \Delta_1}{R_1} \right) + T''',$$

$$T''' = Q''' \left(\frac{\mu}{R_1} + f \frac{\rho_1 + \Delta_1}{R_1} \right).$$

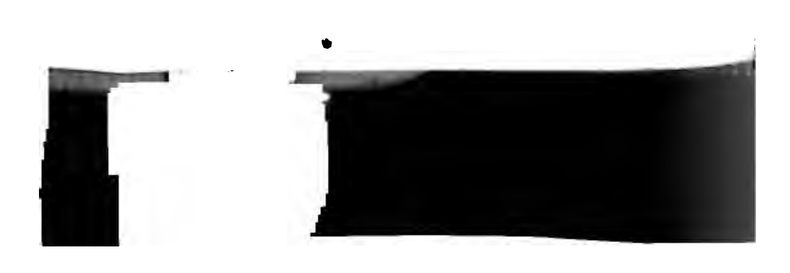
Ajoutant ces égalités membre à membre, et nommant V la somme des poids des wagons, on trouve

$$(9) \quad P = \frac{1}{3} L \left[\mu \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) + f \left(\frac{\rho + \Delta}{R} + \frac{\rho' + \Delta'}{R'} + \frac{\rho'' + \Delta''}{R''} \right) \right] + V \left(\frac{\mu}{R_1} + f \frac{\rho_1 + \Delta_1}{R_1} \right) \ (*).$$

(*) Comme les essieux d'une locomotive ne portent pas généralement la même charge, il serait plus exact de remplacer le premier terme de la formule (9) par celui-ci :

$$q \left(\frac{\mu}{R} + f \frac{\rho + \Delta}{R} \right) + q' \left(\frac{\mu}{R'} + f \frac{\rho' + \Delta'}{R'} \right) + q'' \left(\frac{\mu}{R''} + f \frac{\rho'' + \Delta''}{R''} \right);$$

dans lequel q, q', q'' sont les charges respectives des essieux.



BROUETTE.

Soit F l'effort vertical que développe le moteur pour faire équilibre à la charge Q de la brouette, en y comprenant son poids; les forces F et Q agissant sur un levier dont le point d'appui est sous la roue, on aura, pour l'équilibre,

$$Fp = Qq, \quad \text{d'où} \quad F = Q\frac{q}{p}.$$

Remarquons maintenant que la pression qui s'exerce sur la roue a pour valeur

$$Q - F = Q\left(1 - \frac{q}{p}\right);$$

donc l'effort horizontal de traction sera

$$(10) \qquad P = Q\left(1 - \frac{q}{p}\right)\left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right).$$

Quant à l'effort total développé par le moteur, il sera donné par la formule

$$(11) \qquad S = Q\sqrt{\frac{q^2}{p^2} + \left(1 - \frac{q}{p}\right)^2\left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right)^2}.$$

Si l'on veut que l'effort S soit un minimum, il suffira de déterminer $\frac{q}{p}$ par la relation

$$(12) \qquad \frac{q}{p} = \frac{\left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right)^2};$$

d'où l'on tire, à très-peu près,

$$(13) \qquad \frac{q}{p} = \left(\frac{\mu}{R} + f\frac{\rho + \Delta}{R}\right)^2.$$

Si l'on prend, par exemple,

$$R = 0^m,20, \quad \rho + \Delta = 0^m,03, \quad \mu = 0,1268, \quad f = 0,36,$$

on trouve

$$\frac{q}{p} = 0,473.$$

TABLE DES RAPPORTS DE LA TRACTION A LA CHARGE OBTENUS PAR L'EXPÉRIENCE.

Sur les routes ordinaires, bien entretenues, le chargement est généralement de 1000 kilogrammes par cheval, non compris le poids de la voiture, qu'on estime au tiers ou au quart environ de la charge. Le tableau ci-après contient quelques-uns des résultats auxquels on a été conduit. Mais il ne faut les considérer que comme des à peu près pouvant guider dans l'usage des voitures.

NATURE DE LA VOIE SUPPOSÉE HORIZONTALE.		RAPPORT du tirage à la charge totale.
Terrain naturel, argileux, non battu, mais sec		0,250
Terrain naturel, non battu, siliceux et crayeux		0,165
Terrain ferme, battu et très-uni		0,040
Chaussée en sable ou cailloutis nouvellement placés		0,125
Chaussée en empierrement à l'état d'entretien ordinaire		0,080
Chaussée en empierrement parfaitement entretenue et roulante		0,033
Chaussée pavée à la manière ordinaire, voiture suspendue	au pas	0,030
	au grand trot	0,070
Chaussée pavée en carreaux de grès bien entretenue	au pas	0,025
	au grand trot	0,060
Chaussée en madriers de chêne non rabotés		0,022
Chemin à ornières plates, en fonte ou en dalles très-dures		0,010
Chemin de fer à ornières saillantes et en bon état		0,007
Chemin de fer, les essieux étant continuellement huilés		0,005

Ce tableau est extrait de l'ouvrage de M. Poncelet intitulé : *Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale*, 2e édit., p. 246.

On peut remarquer que le tirage est moindre quand les chevaux qui mènent une voiture vont au pas. Cela tient à ce que, dans le trot, les roues viennent heurter à chaque instant les inégalités du sol, et de ces chocs résultent des pertes de

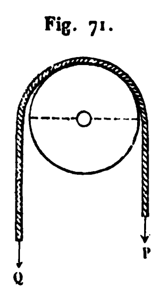
travail, ainsi que nous l'avons expliqué dans le n° 17 de la IVe leçon.

Quand une voiture gravit une pente peu rapide, la pression normale est à peu près la même que sur un plan horizontal; le frottement est donc aussi à très-peu près le même : mais ici la force motrice doit vaincre encore la composante de la charge parallèle à la rampe; il faudra donc augmenter de cette composante la traction calculée comme il a été dit ci-dessus. Si la rampe était très-raide, il faudrait dans les formules (5) et (8) remplacer Q par la composante de la charge normale à la voie, puis augmenter P de la composante parallèle.

DE LA RAIDEUR DES CORDES.

37. Lorsqu'une force P (*fig.* 71) fait monter un poids Q à l'aide d'une poulie, on remarque que du côté où la corde s'enroule, elle s'écarte sensiblement de la poulie, tandis que du côté de la force mouvante, cet écartement est insensible; il suit de là qu'une portion de la force résistante agit pour ployer la corde. Cet écart de la corde augmentant le bras de levier de la résistance, exige une augmentation de force motrice. En effet, si l'on nomme r le rayon de la poulie, augmenté du rayon de la corde, et qu'on fasse abstraction des frottements, on aura pour l'équilibre,

Fig. 71.



$$Pr = Q(r + \delta r),$$

en nommant δr l'augmentation du bras du levier de la résistance; de là on tire

$$P = Q + \frac{\delta r}{r} Q.$$

Il résulte des expériences de Coulomb que pour tenir compte de la *raideur* de la corde, il faut augmenter le moment de la résistance, pris par rapport au centre de la poulie à très-

peu près de la quantité

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta Q), \tag{1}$$

dans laquelle r a la même signification que ci-dessus.

Quant aux valeurs des α et β, elles seront prises dans le tableau suivant :

			VALEURS DE α.	VALEURS DE β.
Cordes blanches de $0^m,020$ de diamètre			0,222	0,0097
»	0,014	»	0,064	0,0055
»	0,009	»	0,011	0,0024
Cordes goudronnées de 30 fils de carret			0,350	0,0126
»	15	»	0,106	0,0061
»	6	»	0,021	0,0026

S'il s'agissait d'une corde blanche dont le diamètre d_1 ne fût pas dans la Table, on y prendrait les valeurs de α et de β relatives au diamètre d qui s'approche le plus de d_1, et l'on calculerait la correction (1) que l'on multiplierait ensuite par

$$\frac{d_1}{d}, \text{ si la corde est mince et flexible,}$$

$$\left(\frac{d_1}{d}\right)^2, \text{ si la corde est grosse et neuve,}$$

$$\left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ si la corde est ordinaire.}$$

S'il s'agissait d'une corde goudronnée dont le nombre n_1 des fils de carret ne fût pas dans la Table, on y prendrait les valeurs de α et β pour le nombre n qui s'approche le plus de n_1, ensuite on multiplierait la correction (1) par $\frac{n_1}{n}$. Telles sont les règles pratiques données par Coulomb.

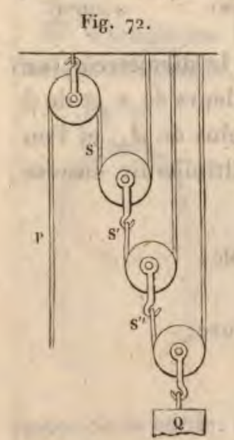
DIXIÈME LEÇON.

DES MOUFLES ET DE LA VIS.

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POULIES.

38. Soit proposé de soulever un poids Q avec un système de poulies tel que celui de la *fig.* 72. La première poulie du système est fixe, toutes les autres sont mobiles. Soient S, S', S'',... les tensions des cordons attachés aux chapes; ϖ étant le poids d'une poulie, ϖ' le poids d'une chape (les poulies sont supposées égales), on aura successivement (33), en faisant abstraction du frottement,

Fig. 72.



$$S = \frac{1}{2}(S' + \varpi + \varpi'),$$

$$S' = \frac{1}{2}(S'' + \varpi + \varpi'),$$

$$S'' = \frac{1}{2}(Q + \varpi + \varpi'),$$

et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre de poulies.

Multipliant la deuxième de ces équations par $\frac{1}{2}$, la troisième par $\frac{1}{2^2}$, etc., puis ajoutant, on trouve, en nommant n le nombre des poulies mobiles,

$$S = \frac{Q}{2^n} + (\varpi + \varpi')\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Faisant la somme des termes de la progression, et remplaçant

S par P qui lui est égal, on obtient enfin

$$(1)\qquad P = \frac{Q}{2^n} + \frac{(\varpi + \varpi')(2^n - 1)}{2^n}.$$

Si, par exemple,

$$Q = 1000^k, \quad n = 5, \quad \varpi = 4^k, \quad \varpi' = 1,$$

on obtient

$$P = 36^k,093.$$

Ayons égard maintenant au frottement.

Nous avons d'abord, par la théorie de la poulie mobile, et en mettant en évidence le poids ϖ' de la chape,

$$(2)\quad S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right)S' + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right)\varpi' + \frac{1}{2}\varpi.$$

Posant, pour abréger,

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right),$$

$$B = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right)\varpi' + \frac{1}{2}\varpi,$$

l'équation (2) devient

$$S = AS' + B.$$

On aura de même pour la deuxième poulie mobile

$$S' = AS'' + B,$$

pour la troisième

$$S'' = AQ + B,$$

et ainsi de suite.

Multipliant la deuxième de ces équations par A, la troisième par A^2..., on aura, en les ajoutant et supposant que le nombre des poulies mobiles soit n,

$$S = A^nQ + B(1 + A + A^2 + \ldots + A^{n-1});$$

et, en faisant la somme des termes de la progression,

$$S = A^nQ + B\frac{1 - A^n}{1 - A}.$$

Remplaçant A et B par leurs valeurs, celle de S devient

$$S=\frac{Q}{2^n}\left(1+\frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right)^n$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right)\varpi'+\varpi\right]\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{f\rho}{r\sqrt{1+f^2}}\right)}.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}=(1+f^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Développant le second membre par la formule du binôme, et négligeant les termes du quatrième ordre, par rapport à f, on a d'abord

$$\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}=1-\frac{1}{2}f^2.$$

Négligeant encore les termes du quatrième ordre par rapport à f, ρ on trouve

$$S=\frac{Q}{2^n}\left(1+\frac{f\rho}{r}\right)^n+\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{f\rho}{r}\right)\varpi'+\varpi\right]\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{f\rho}{r}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{f\rho}{r}\right)}.$$

Mais, au même degré d'approximation,

$$\left(1+\frac{f\rho}{r}\right)^n=1+\frac{nf\rho}{r},$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{nf\rho}{r}\right)}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{f\rho}{r}\right)}=2\frac{f\rho}{r}\left[1-\frac{n+1}{2^n}\right]+\frac{2(2^n-1)}{2^n};$$

à l'aide de ces valeurs, celle de S devient

$$S=\frac{Q}{2^n}\left(1+\frac{nf\rho}{r}\right)+\left[\left(1+\frac{f\rho}{r}\right)\varpi'+\varpi\right]\left[\frac{2^n-1}{2^n}+\frac{f\rho}{r}\,\frac{2^n-n-1}{2^n}\right].$$

Développant le deuxième terme, et négligeant les termes du

quatrième ordre par rapport à f, ρ, on trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} S &= \frac{Q}{2^n}\left(1+\frac{nf\rho}{r}\right)+\frac{(2^n-1)}{2^n}\left[\varpi+\left(1+\frac{f\rho}{r}\right)\varpi'\right]\\ &+\frac{2^n-n-1}{2^n}(\varpi+\varpi')\frac{f\rho}{r}.\end{aligned}\right.$$

Reprenons la formule (10) du n° 33 relative à la poulie fixe; en vertu de cette formule, on a

$$(4)\qquad P=\left(1+2\frac{f\rho}{r}\right)S+\frac{\varpi f\rho}{r};$$

substituant la valeur de S dans (4), il vient

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q}{2^n}\left[1+\frac{f\rho}{r}(n+2)\right]\\ &+\frac{2^n-1}{2^n}\left[(\varpi+\varpi')\left(1+2\frac{f\rho}{r}\right)+\varpi'\frac{f\rho}{r}\right]\\ &+\frac{f\rho}{r}\left[\varpi+\frac{2^n-n-1}{2^n}(\varpi+\varpi')\right];\end{aligned}$$

et en ordonnant par rapport à $\frac{f\rho}{r}$,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{Q}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^n}(\varpi+\varpi')\\ &+\frac{f\rho}{r}\left[\frac{(n+2)Q+(2^n-1)(3\varpi+4\varpi')-n(\varpi+\varpi')}{2^n}+\varpi\right].\end{aligned}\right.$$

Si dans cette formule on fait $f=0$, on retrouve la formule (1).

En prenant le rapport de P à Q, on reconnaît que $\frac{P}{Q}$ sera d'autant plus petit que Q sera plus grand; d'où il suit qu'ici encore *il y a économie de force motrice à soulever de grandes charges.*

Si l'on suppose

$$Q=1000^k,\quad n=5,\quad \varpi=4^k,\quad \varpi'=1,$$
$$r=0^m,20,\quad \rho=0,03,\quad f=0,13,$$

on trouve

$$P=40^k,723.$$

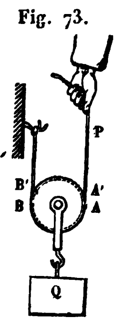
En comparant ce résultat avec celui déjà obtenu au commen-

cement de ce numéro, on reconnaît que les frottements des six poulies ont absorbé $4^k,274$ de force motrice.

RAPPORT DES CHEMINS PARCOURUS PAR LA PUISSANCE ET LA RÉSISTANCE.

Considérons d'abord une poulie mobile. Si le poids Q (*fig.* 73) s'élève d'une certaine quantité, le centre de la poulie s'élèvera de la même quantité; les points de contact A et B parcourront aussi l'espace q, et viendront respectivement en A′ et B′. Considérant le point A′ comme fixe dans l'espace, il passera donc à travers ce point une quantité de corde égale à $AA' + BB' = 2q$. Donc, si l'on nomme p le chemin décrit par le point d'application de la puissance, on aura

Fig. 73.



$$\frac{p}{q} = 2.$$

Revenons maintenant à notre système de poulies. On a d'abord, pour la poulie fixe,

$$p = s;$$

puis successivement, pour les poulies mobiles,

$$s = 2s', \quad s' = 2s'', \quad s'' = 2q.$$

Multipliant ces équations membre à membre, et supprimant les facteurs communs, il vient, en supposant que le nombre des poulies mobiles soit égal à n,

(6) $$p = 2^n q.$$

RAPPORT DU TRAVAIL UTILE AU TRAVAIL MOTEUR.

Le travail utile a pour valeur

$$T_u = Qq;$$

et le travail moteur

$$T_m = Pp.$$

De là on déduit

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{P}\frac{q}{p}.$$

Remplaçant $\frac{q}{p}$ par sa valeur tirée de l'équation (6), il vient

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{2^n}\frac{Q}{P}.$$

Mais l'équation (5) donne

$$\frac{2^n P}{Q} = 1 + (2^n - 1)\frac{\varpi + \varpi'}{Q}$$
$$+ \frac{f\rho}{r}\left[n + 2 + \frac{(2^n - 1)(3\varpi + 4\varpi') - n(\varpi + \varpi') + 2^n \varpi}{Q}\right].$$

Si on l'écrit sous la forme

$$\frac{2^n P}{Q} = 1 + K + K'\frac{f\rho}{r},$$

et qu'on observe que $\frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{2^n P}$, il vient

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{1 + K + K'\frac{f\rho}{r}}.$$

Maintenant, si dans les valeurs de K et de K' on supprime les termes divisés par Q, le rapport ci-dessus prendra sa valeur maxima, et l'on aura

(7) $$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{1 + (n+2)\frac{f\rho}{r}} = 1 - (n+2)\frac{f\rho}{r},$$

en effectuant la division et négligeant les termes du quatrième ordre par rapport à f, ρ.

Si, par exemple, on suppose

$$n = 5, \quad f = 0,13, \quad \rho = 0,03, \quad r = 0,20,$$

on trouve, pour la valeur maxima du rendement,

$$\frac{T_u}{T_m} = 0,864 \text{ environ}.$$

Effectuant la division dans la valeur générale de $\frac{T_u}{T_m}$, et ne conservant que les termes du deuxième ordre par rapport à f, ρ, K, on trouve d'abord

$$\frac{T_u}{T_m} = 1 - K + K^2 - K' \frac{f\rho}{r};$$

remettant pour K et K' leurs valeurs, on obtient ensuite

$$(8)\quad \frac{T_u}{T_m} = 1 - (2^n - 1)\frac{\varpi + \varpi'}{Q} + (2^n - 1)^2 \left(\frac{\varpi + \varpi'}{Q}\right)^2 - \frac{f\rho}{r}\left[n + 2 + \frac{(2^n - 1)(3\varpi + 4\varpi') + 2^n\varpi - n(\varpi + \varpi')}{Q}\right].$$

Si l'on néglige la deuxième partie du dernier terme, qui est en général très-petite, on a simplement

$$(9)\quad \frac{T_u}{T_m} = 1 - (2^n - 1)\frac{\varpi + \varpi'}{Q} + (2^n - 1)^2 \left(\frac{\varpi + \varpi'}{Q}\right)^2 - \frac{f\rho}{r}(n + 2).$$

Si, par exemple,

$$r = 0^m,20, \quad \rho = 0,03, \quad f = 0,13,$$
$$Q = 1000^k, \quad \varpi = 4, \quad \varpi' = 1, \quad n = 5,$$

on trouve, pour le rendement,

$$\frac{T_u}{T_m} = 0,733.$$

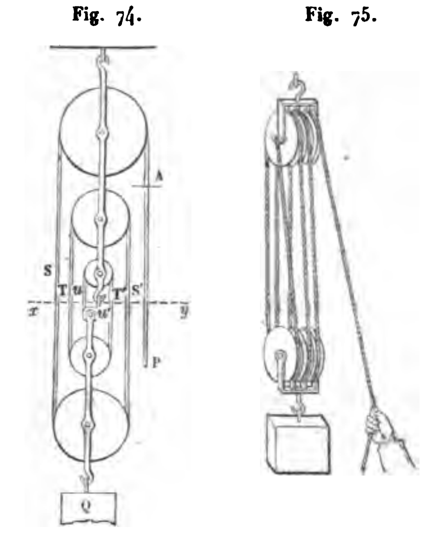
Ce rendement est donc environ de 73 pour 100.

ÉQUILIBRE D'UNE MOUFLE.

39. *Une moufle consiste en un système de poulies assemblées sur la même chape, et tournant sur des axes différents, ou sur le même axe (fig. 74 et 75).*

Considérons par exemple la moufle (*fig.* 74) et soient S, S′, T, T′, u, u', les tensions des cordes. Si l'on fait une section xy, il est clair qu'on ne pourra soutenir la moufle inférieure, qu'en appliquant les forces ci-dessus aux cordes qui vont s'enrouler sur les poulies de la moufle mobile; donc, en nommant Q la charge, y compris le poids de la chape et des poulies qu'elle porte, on aura

Fig. 74. Fig. 75.



$$(1) \qquad S + S' + T + T' + u + u' = Q.$$

Mais, si l'on n'a pas égard au frottement,

$$P = S = S' = T = T' = u = u';$$

donc l'équation précédente devient, en nommant n le nombre des poulies,

$$nP = Q, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Q}{n}.$$

Ainsi *la puissance est égale à la résistance divisée par le nombre des poulies.*

Ayons égard maintenant au frottement.

Si l'on pose, pour abréger,

$$A = \frac{r\sqrt{1+f^2} + f\rho}{r\sqrt{1+f^2} - f\rho},$$

$$B = \frac{\varpi f \rho}{r\sqrt{1+f^2} - f\rho},$$

les équations (2) et (9) du n° 33, relatives à la poulie fixe et à

la poulie mobile, donnent respectivement (*fig.* 74), en supposant toutes les poulies de même poids, et le rapport $\frac{\rho}{r}$ constant,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} P = AS + B, \\ S = AS' - B, \\ S' = AT + B, \\ T = AT' - B, \\ T' = A u + B, \\ u = A u' - B, \\ \text{auxquelles nous joindrons l'identité} \\ u' = u'. \end{array}\right.$$

Ces six équations combinées avec l'équation (1) serviront à déterminer les sept inconnues P, S, S', T, T', u, u'. En les ajoutant membre à membre, on en tire

$$P + Q = AQ + u',$$

d'où

$$(3)\qquad u' = P + Q - AQ.$$

Multiplions maintenant la deuxième des équations (2) par A, la troisième par A^2, etc., on obtient ainsi

$$\begin{aligned} P &= AS + B, \\ AS &= A^2 S' - AB, \\ A^2 S' &= A^3 T + A^2 B, \\ A^3 T &= A^4 T' - A^3 B, \\ A^4 T' &= A^5 u + A^4 B, \\ A^5 u &= A^6 u' - A^5 B. \end{aligned}$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et nommant toujours n le nombre des poulies, il vient

$$P = A^n u' + B(1 - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 \ldots . - A^{n-1}).$$

Mais les termes entre parenthèses forment une progression géométrique dont la raison est $-A$, et qui est composée de n termes, on aura donc

$$1 - A + A^2 \ldots . - A^{n-1} = -\frac{A^n - 1}{A + 1},$$

par suite la valeur de P devient

$$P = A^n u' - B\frac{A^n - 1}{A + 1}.$$

Remplaçant U′ par sa valeur (3), on trouve

$$(4) \qquad P = \frac{A^n(A-1)}{A^n - 1} Q + \frac{B}{A+1}.$$

Remarquons maintenant que si l'on néglige les termes du quatrième ordre, par rapport à f, ρ, on a, ainsi que nous l'avons vu précédemment,

$$A = 1 + 2\frac{f\rho}{r}, \quad B = \frac{\varpi f\rho}{r};$$

d'où l'on tire au même degré d'approximation,

$$A^n = 1 + 2n\frac{f\rho}{r}, \quad \frac{B}{A+1} = \frac{1}{2}\frac{\varpi f\rho}{r},$$

et ensuite

$$A - 1 = 2\frac{f\rho}{r},$$

$$A^n - 1 = 2n\frac{f\rho}{r},$$

$$\frac{A^n(A-1)}{A^n - 1} = \frac{1}{n}\left(1 + 2n\frac{f\rho}{r}\right) = \frac{1}{n} + 2\frac{f\rho}{r}.$$

Substituant ces diverses valeurs dans l'équation (4), on est conduit à la formule très-simple

$$(5) \qquad P = \left(\frac{1}{n} + 2\frac{f\rho}{r}\right) Q + \frac{1}{2}\frac{f\rho}{r}\varpi,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(6) \qquad P = \frac{Q}{n} + \frac{1}{2}\frac{f\rho}{r}(\varpi + 4Q);$$

et si l'on met en évidence le poids $\varpi' + \frac{1}{2} n\varpi$ de la chape, on trouve

$$(7) \quad P = \frac{Q}{n} + \frac{2\varpi' + n\varpi}{2n} + \frac{1}{2}\frac{f\rho}{r}[(2n+1)\varpi + 4\varpi' + 4Q].$$

Ici, comme dans tous les autres cas, *il y a économie de force motrice à soulever de grandes charges.* On voit aussi qu'*il est avantageux d'employer de petits tourillons et des poulies d'un grand rayon.*

RAPPORT DES CHEMINS PARCOURUS PAR LA PUISSANCE ET LA RÉSISTANCE.

Si le poids Q s'élève d'une quantité quelconque q, les diamètres horizontaux de chaque poulie de la chape mobile s'élèveront de la même quantité; par conséquent, les n fils qui soutiennent la moufle mobile se raccourciront de la même quantité q; il passera donc à travers le point fixe A une quantité p de corde égale à nq, et l'on aura

$$p = nq.$$

RAPPORT DU TRAVAIL UTILE AU TRAVAIL MOTEUR.

Le travail utile et le travail moteur ont pour valeurs respectivement

$$T_u = Qq,$$
$$T_m = Pp;$$

prenant le rapport,

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{n}\frac{Q}{P}.$$

Mais on tire de l'équation (7)

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{n} + \frac{2\varpi' + n\varpi}{2nQ} + \frac{1}{2}\frac{f\rho}{r}\left[(2n+1)\frac{\varpi}{Q} + \frac{4\varpi'}{Q} + 4\right];$$

chassant le dénominateur n, il vient

$$\frac{nP}{Q} = 1 + \frac{2\varpi' + n\varpi}{2Q} + \frac{1}{2}n\frac{f\rho}{r}\left[(2n+1)\frac{\varpi}{Q} + \frac{4\varpi'}{Q} + 4\right];$$

renversant le rapport, et observant que

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{nP},$$

on obtient

$$(8)\quad \frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{1 + \frac{2\varpi' + n\varpi}{2Q} + \frac{1}{2}n\frac{f\rho}{r}\left[(2n+1)\frac{\varpi}{Q} + 4\frac{\varpi'}{Q} + 4\right]}.$$

En supprimant au dénominateur le terme affecté de Q, on aura la valeur maxima du rendement, savoir

$$(9) \qquad \frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{1 + 2n\frac{f\rho}{r}}.$$

Si l'on fait la division, et qu'on néglige des termes très-petits, les deux formules ci-dessus deviennent

$$(10) \quad \frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{2\varpi' + n\varpi}{2Q} - \frac{1}{2}n\frac{f\rho}{r}\left[(2n+1)\frac{\varpi}{Q} + \frac{4\varpi'}{Q} + 4\right],$$

$$(11) \qquad \frac{T_u}{T_m} = 1 - 2n\frac{f\rho}{r}.$$

Si, par exemple,

$$n = 6, \quad f = 0,13, \quad \rho = 0,03, \quad r = 0,20,$$

$$\varpi = 4^k, \quad \varpi' = 30, \quad Q = 1000,$$

les formules (10) et (11) donnent respectivement

la première $\frac{T_{u'}}{T_m} = 0,714$,

la deuxième $\frac{T_u}{T_m} = 0,766$.

La moufle proposée a donc un rendement maximum d'environ 76 pour 100.

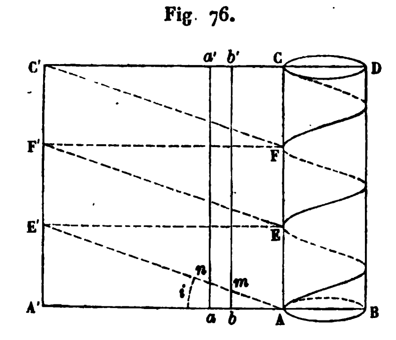
Si l'on compare la formule (7) du n° 38 avec la formule (11) du n° 39, on reconnaît que si le nombre des poulies mobiles du premier système est le même que le nombre total des poulies de la moufle, le premier système est plus avantageux que le second, pourvu que le nombre des poulies surpasse deux.

DÉFINITION DE L'HÉLICE.

40. Soit un cylindre ABCD (*fig.* 76). Prenons AA′ égale à la circonférence de la base, puis construisons le rectangle

AA′CC′; ce rectangle ne sera autre chose que la surface convexe du cylindre développée sur le plan de la figure. Partageons maintenant la hauteur AC en plusieurs parties égales; par les points de division E, F,. . ., menons des parallèles à AA′; puis tirons les diagonales AE′, EF′, FC′, etc. Cela fait, si nous enroulons le rectangle ainsi préparé sur le cylindre, le côté AA′ s'enroulera sur la circonférence de la base, et le point A′ après l'enroulement viendra se placer en A; de même E′ viendra en E, et ainsi de suite. Quant aux diagonales, elles traceront sur le cylindre une courbe continue qui porte le nom d'*hélice*. La portion de cette courbe due à l'enroulement d'une diagonale se nomme *spire*. Plus généralement, *une spire est un arc d'hélice qui, partant d'un point d'une génératrice, vient se terminer à la même génératrice, après avoir décrit une révolution entière.*

Fig. 76.



On nomme aussi *pas de l'hélice, la distance qui sépare les deux extrémités d'une spire.* L'hélice a pour propriété caractéristique d'avoir toutes ses tangentes également inclinées sur le plan de la base du cylindre. En effet, on peut concevoir le rectangle comme étant décomposé en une infinité de tranches infiniment minces, parallèles à l'axe du cylindre : alors chaque petit rectangle venant se placer tout d'une pièce sur le cylindre, tout arc d'hélice *mn* qu'il renferme conservera sur le cylindre, par rapport aux génératrices, la même inclinaison que sur le rectangle, et comme sur le rectangle cette inclinaison est constante, elle le sera aussi sur le cylindre : mais cet élément prolongé devient, sur le cylindre, la tangente à l'hélice; donc *la tangente en un point quelconque de l'hélice fait le même angle avec les génératrices, et par conséquent avec le plan de la base du cylindre.*



Si l'on nomme i cette inclinaison, h le pas de l'hélice, le triangle rectangle AA'E donnera

$$A'E' \quad \text{ou} \quad h = AA' \operatorname{tang} i.$$

Mais $AA' = 2\pi r$, en nommant r le rayon du cylindre; donc

(1) $$h = 2\pi r \operatorname{tang} i,$$

d'où

$$\operatorname{tang} i = \frac{h}{2\pi r}.$$

DÉFINITION DE LA VIS.

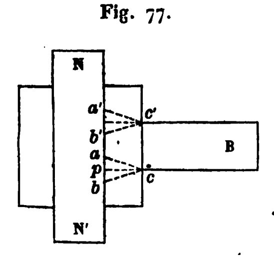
Ayant tracé une hélice sur un cylindre, prenons une figure plane quelconque; faisons coïncider l'un de ses côtés avec une génératrice, en dirigeant son plan vers l'axe; puis faisons mouvoir cette figure sur l'hélice de manière que le même point s'appuie constamment sur la courbe : dans ce mouvement, la figure mobile engendrera sur le cylindre le filet de la vis, qui est l'ensemble de ce filet et du cylindre.

La vis est à *filet triangulaire* ou à *filet carré*, suivant que la figure génératrice est un triangle ou un carré. Le pas de la vis est le pas de l'hélice directrice, ou, en d'autres termes, la distance (mesurée sur une même génératrice) qui sépare les courbes de naissance de la partie inférieure ou de la partie supérieure de deux filets consécutifs.

La génération de la vis s'exécute très-simplement dans la pratique.

On tracera d'abord deux positions consécutives (*fig.* 77) acb, $a'c'b'$ du triangle isocèle générateur; et le trapèze $acb'c'$ sera la coupe du creux de la vis, faite par un plan mené suivant l'axe du cylindre.

Fig. 77.



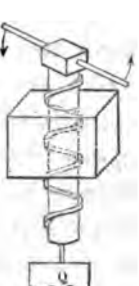
Cela posé, on construira un burin B, terminé par le trapèze ci-dessus; alors, en imprimant au cylindre (dont le rayon est celui du noyau augmenté de cp) un double mouvement de translation

et de rotation, qui fasse avancer NN′ d'un pas à chaque révolution; en présentant au cylindre le burin solidement appuyé et dirigé vers l'axe, il creusera graduellement la vis.

Dans la pratique, on prend le pas de la vis égal à la base du triangle générateur.

Si la figure génératrice tourne dans un cylindre creux de même rayon que le noyau, elle engendrera un sillon dans lequel la vis ne pourra avancer qu'en tournant. Ce cylindre creux est l'*écrou* de la vis (*fig.* 78).

Fig. 78.



Si l'écrou est fixe, la vis est mise en mouvement au moyen d'une manivelle telle que celle de la figure. Si, au contraire, c'est la vis qui est fixe, on fait mouvoir l'écrou à l'aide d'un ou plusieurs bras de leviers qu'on entre à volonté dans l'écrou. Mais soit que l'écrou soit fixe ou mobile, les conditions d'équilibre sont toujours les mêmes.

On remarquera que, dans un cas comme dans l'autre, chaque point de la pièce mobile décrit une hélice sur un cylindre de même axe que le cylindre donné, et dont le rayon est la distance à l'axe du point que l'on considère. Toutes ces hélices ont le même pas, mais ne sont pas également inclinées sur le plan de la base.

On voit par l'équation (1) que cette inclinaison sera d'autant plus grande que r sera plus petit.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que l'écrou est fixe, et nous admettrons qu'on veut soulever un poids suspendu à la partie inférieure de la vis.

ÉQUILIBRE DE LA VIS.

Imprimons à la vis un mouvement infiniment petit qui fasse arriver le point m en n (*fig.* 79); dans ce mouvement la vis aura tourné d'une certaine quantité ω, et l'on aura, en nommant p le bras de levier de la puissance,

$$\varpi . 2\,P = 2\,P p \omega.$$

Pareillement

$$\mathcal{C}Q = -Q.ms,$$

et, en vertu de l'équation du travail,

$$2Pp\omega = Q.ms.$$

Mais

$$ms = ns.\text{tang}\,i = r\omega\,\text{tang}\,i,$$

en nommant r le rayon du cylindre; donc

$$2Pp\omega = Qr\omega\,\text{tang}\,i.$$

Simplifiant et remplaçant tang i par sa valeur, on trouve

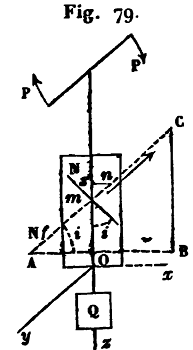
$$\frac{2P}{Q} = \frac{h}{2\pi p}.$$

Par conséquent, *la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.*

Ayons égard maintenant au frottement.

Chaque point de la surface du filet touche un certain point de l'écrou, et il est assujetti à parcourir une hélice tracée sur un cylindre, dont le rayon est la distance à l'axe du point que l'on considère, et dont le pas est celui de la vis. Or on peut supposer la force Q comme étant décomposée en une infinité de forces parallèles à l'axe du cylindre et agissant aux divers points de contact; ces petites forces produiront dans les divers plans tangents aux cylindres sur lesquels sont tracées les hélices, des pressions normales à ces courbes, et ces pressions à leur tour feront naître des frottements dont nous allons tenir compte.

Fig. 79.



Soient i l'inclinaison (*fig.* 79) de l'hélice sur le plan de la base du cylindre, et mn un petit élément de l'hélice situé dans le plan tangent ACB.

Les forces qui agissent au point m sont la réaction normale N et le frottement Nf. Pour un autre point situé sur la même hélice, les réactions seront N′ et N′f, etc.; relativement à une

autre hélice, les réactions analogues seront N_1, $N_1 f$, etc. Ainsi la vis est sollicitée par les forces

$$P,\ P,\ Q,\ N,\ N' \ldots\ Nf,\ N'f \ldots\ N_1,\ N_1 f,\ N'_1,\ N'_1 f \ldots$$

Pour l'équilibre, il faut que les sommes des composantes de ces forces parallèles à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (dont le dernier est l'axe de la vis), soient nulles, et que les sommes de leurs moments par rapport aux mêmes axes soient aussi nulles.

La somme des composantes des réactions parallèles à l'axe des z est, pour une même hélice,

$$\begin{aligned} &- N\cos i + Nf\sin i - N'\cos i + N'f\sin i - \ldots \\ &= -(\cos i - f\sin i)\,\Sigma N. \end{aligned}$$

Relativement à une autre hélice, la somme des composantes sera pareillement

$$-(\cos i_1 - f\sin i_1)\,\Sigma N_1.$$

Egalant à zéro la somme totale des composantes, on obtient

$$(2)\qquad Q = (\cos i - f\sin i)\,\Sigma N + (\cos i_1 - f\sin i_1)\,\Sigma N_1 + \ldots$$

De même, si l'on égale à zéro la somme des moments relatifs au même axe, on trouve

$$(3)\quad 2Pp = r(\sin i + f\cos i)\,\Sigma N + r_1(\sin i_1 + f\cos i_1)\,\Sigma N_1 + \ldots;$$

r, r_1, ..., sont les rayons des cylindres sur lesquels sont tracées les diverses hélices. Les inconnues du problème étant les forces $P, N, N', \ldots, N_1, N'_1, \ldots$, les autres équations de l'équilibre, que je n'écris pas, ne pourraient servir, conjointement avec (2) et (3), qu'à déterminer 6 des inconnues, toutes les autres étant données.

Remarquons maintenant que le jeu qu'on laisse à la vis ne lui permet de frotter que latéralement; si donc on suppose que le premier terme de chacune des équations (2) et (3) se rapporte à l'hélice moyenne, on pourra poser

$$i_1 = i + \delta i,\quad r_1 = r + \delta r,\quad \Sigma N_1 = \Sigma N + \delta \Sigma N \ldots,$$

et ces équations deviendront, en nommant m le nombre des

hélices de contact, et ne conservant que les termes du premier ordre par rapport aux variations,

$$Q = m(\cos i - f\sin i)\Sigma N - (\sin i + f\cos i)\Sigma N . \Sigma_1 \delta i$$
$$+ (\cos i - f\sin i)\Sigma_1 . \delta \Sigma N,$$

$$2Pp = mr(\sin i + f\cos i)\Sigma N + r(\cos i - f\sin i)\Sigma N . \Sigma_1 \delta i$$
$$+ (\sin i + f\cos i)\Sigma N . \Sigma_1 \delta r + r(\sin i + f\cos i)\Sigma_1 . \delta \Sigma N = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les points d'une même hélice, et le signe Σ_1, à toutes les hélices frottantes. Mais on a, à très-peu près,

$$\Sigma_1 \delta i = 0, \quad \Sigma_1 . \delta \Sigma N = 0, \quad \Sigma_1 \delta r = 0,$$

car les variations relatives aux hélices tracées sur des cylindres symétriques du cylindre moyen sont de signes contraires, et ne sauraient différer que très-peu; donc on aura simplement

(4) $$Q = m(\cos i - f\sin i)\Sigma N,$$

(5) $$2Pp = mr(\sin i + f\cos i)\Sigma N.$$

Divisant l'équation (5) par l'équation (4), il vient

$$\frac{2P}{Q} = \frac{r}{p}\,\frac{\sin i + f\cos i}{\cos i - f\sin i}.$$

Divisant numérateur et dénominateur par $\cos i$, on trouve, en ayant égard à l'équation (1),

(6) $$\frac{2P}{Q} = \frac{r}{p}\,\frac{h + 2\pi r f}{2\pi r - fh}.$$

Du reste, cette formule dérive très-simplement de la relation (2) du n° 30, en y faisant $b = 2\pi r$, et remplaçant P par $2P\frac{p}{r}$. Cela résulte sans peine de ce que l'hélice peut être assimilée à un plan incliné, ayant pour hauteur le *pas* de l'hélice, et pour base la circonférence de la base du cylindre. Le changement de P en $2P\frac{p}{r}$ revient à remplacer la première force par une autre parallèle, agissant à l'extrémité d'un bras de levier p.

Si dans cette équation on fait $f=0$, on retrouve

$$\frac{2P}{Q}=\frac{h}{2\pi p}.$$

Si la force P était destinée à empêcher l'accélération du mouvement, il suffirait évidemment de changer le signe de f.

Supposons, par exemple,

$$r=0^{m},08,\quad h=0^{m},01,\quad p=1^{m},\quad f=0,13;$$

dans ce cas on trouve, en n'ayant pas égard au frottement,

$$\frac{2P}{Q}=0,0016.$$

De sorte que si l'on prend, par exemple, $Q=1000^{k}$, on aura

$$2P=1^{k},6.$$

Si l'on a égard au frottement, la formule (6) donne

$$\frac{2P}{Q}=0,0104,$$

et, dans l'hypothèse $Q=1000^{k}$,

$$2P=10^{k},4;$$

ce qui fait voir que, dans l'exemple précédent, la puissance est rendue 6,5 fois plus grande par l'action des frottements.

La formule (6) peut s'écrire sous la forme

$$(7)\qquad \frac{2P}{Q}=\frac{h}{2\pi p}+\frac{f(4\pi^2r^2+h^2)}{2\pi p(2\pi r-fh)}.$$

Si, dans le deuxième terme, on fait la division du numérateur par le dénominateur, et qu'on néglige les termes du troisième ordre par rapport à f, h, on trouve

$$(8)\qquad \frac{2P}{Q}=\frac{h}{2\pi p}+\frac{rf}{p}.$$

Si on voulait tenir compte des termes du troisième ordre, on aurait

$$(9)\qquad \frac{2P}{Q}=\frac{h}{2\pi p}+\frac{rf}{p}+\frac{fh}{2\pi p}\left(f+\frac{h}{2\pi r}\right).$$

Quand la force P est destinée à empêcher l'accélération du mouvement, on a, d'après ce que nous avons dit plus haut,

$$(10) \qquad \frac{2P}{Q} = \frac{r}{p} \cdot \frac{h - 2\pi rf}{2\pi r + fh};$$

et l'on voit que le problème n'est possible qu'autant que

$$h > 2\pi rf.$$

Si le pas de la vis a pour valeur

$$h = 2\pi rf,$$

on aura

$$P = 0,$$

et le frottement suffira seul à maintenir l'uniformité du mouvement.

RAPPORT DES CHEMINS PARCOURUS PAR LA PUISSANCE ET LA RÉSISTANCE.

Pour un tour entier de la vis, la résistance s'élève ou s'abaisse d'une quantité égale au pas ; plus généralement, la rotation de la vis est proportionnelle au chemin parcouru par la résistance : on aura donc, en nommant p' et q les chemins,

$$p' = kq,$$

k étant une constante qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, faisons dans cette équation

$$q = h, \quad p' = 2\pi p;$$

elle donne

$$k = \frac{2\pi p}{h}:$$

alors la valeur de p' deviendra

$$(11) \qquad p' = \frac{2\pi p}{h} q.$$

RAPPORT DU TRAVAIL UTILE AU TRAVAIL MOTEUR.

Le travail utile et le travail moteur ont pour valeurs respectivement

$$T_u = Qq$$

$$T_m = 2Pp';$$

prenant le rapport,

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{h}{2\pi p}\,\frac{Q}{2P}.$$

Mais on tire de l'équation (6)

$$\frac{Q}{2P} = \frac{p}{r}\,\frac{2\pi r - fh}{h + 2\pi rf};$$

substituant dans l'équation précédente, il vient

$$(12) \qquad \frac{T_u}{T_m} = \frac{h(2\pi r - fh)}{2\pi r(2\pi rf + h)}.$$

Cette formule donne pour le rendement une valeur un peu trop grande. Cela tient à ce que le poids de la vis est compris dans Q; mais l'erreur qui en résulte est peu importante : du reste, il serait aisé d'y avoir égard.

Si, par exemple, on suppose, comme précédemment,

$$h = 0{,}01, \quad r = 0{,}08, \quad f = 0{,}13,$$

on trouve

$$\frac{T_u}{T_m} = 0{,}14.$$

On peut remarquer que le rendement d'une vis ne dépend pas de la longueur du bras de levier qui sert à la manœuvrer.

Dans le cas où la force motrice agit pour empêcher l'accélération du mouvement, la formule du rendement est

$$(13) \qquad \frac{T_u}{T_m} = \frac{h(2\pi r + fh)}{2\pi r(h - 2\pi rf)},$$

et l'on peut remarquer que, dans ce cas, $T_u > T_m$. Cela résulte de ce qu'ici la véritable force motrice est Q et non pas P.



ONZIÈME LEÇON.

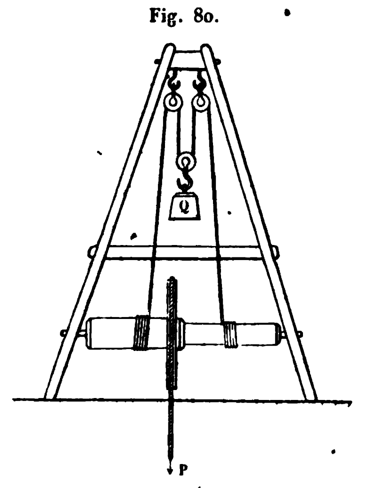
DU TREUIL DIFFÉRENTIEL, DU PONT-LEVIS, DES GRUES, DU CRIC, DE LA VIS SANS FIN, DU COIN.

41. Nous avons vu, dans les leçons précédentes, comment on avait égard au frottement dans le calcul de la force motrice des machines. Dans celles que nous allons étudier, nous nous arrêterons à la première approximation, attendu que l'usage qu'on en fait ne comporte guère des calculs de précision.

TREUIL DIFFÉRENTIEL OU CHÈVRE DE LOMBARD.

Le treuil différentiel, qu'on nomme aussi chèvre de Lombard (*fig.* 80), se compose essentiellement de deux cylindres

Fig. 80.



assujettis sur le même axe, mais d'un diamètre différent. Une roue est montée sur le grand cylindre, ainsi que dans le treuil ordinaire. De la circonférence du grand cylindre part une corde qui va s'enrouler sur une première poulie fixe, d'où elle passe sur une poulie mobile dont la chape porte la résistance; enfin de celle-ci la corde va passer sur la gorge d'une deuxième poulie fixe, d'où elle descend vers le petit cylindre pour s'y enrouler. Si l'on fait éprouver au treuil une rotation ω, le point d'application

de la force motrice décrira le chemin $R\omega$; en nommant R le rayon de la roue, on aura pour le travail de la force P

$$\mathcal{T}P = PR\omega.$$

Soit q le chemin parcouru par la résistance; ce chemin sera la moitié de celui décrit par un point de la corde : et comme celui-ci est égal évidemment à

$$r\omega - \omega r',$$

r et r' étant les rayons des deux cylindres, on aura

$$q = \frac{1}{2}\omega(r - r');$$

de sorte que le travail de Q sera

$$\mathcal{T}Q = \frac{1}{2}Q(r - r')\omega.$$

Égalant le travail moteur au travail résistant, il vient

$$PR = \frac{1}{2}Q(r - r'),$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{r - r'}{2R}.$$

Ce qui fait voir que *dans le treuil différentiel; la puissance est à la résistance comme la différence des rayons des deux cylindres est au diamètre de la roue.*

Le treuil différentiel offre cet avantage qu'on peut augmenter, pour ainsi dire, indéfiniment la puissance de la machine, sans nuire à la solidité des cylindres qui supportent la résistance; car il suffit pour cela de diminuer la différence $r - r'$ de leurs rayons. Le treuil ordinaire n'offre pas cet avantage. Mais on ne doit pas perdre de vue que l'augmentation de puissance se fait toujours aux dépens de la vitesse. En effet, nous avons vu plus haut que pour une rotation ω, on avait, en nommant q le chemin décrit par la charge,

$$q = \frac{1}{2}(r - r')\omega.$$

On a aussi pour le chemin p parcouru par le point d'application de la puissance,

$$p = R\omega.$$

De la comparaison de ces deux équations, on tire

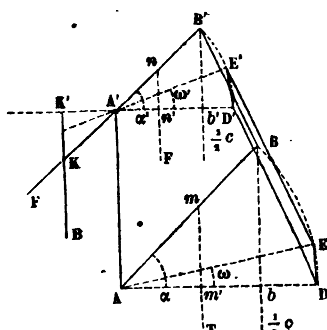
$$\frac{p}{q} = \frac{2R}{r - r'};$$

de sorte que *si la puissance est un certain nombre de fois plus petite que la résistance, le chemin décrit par la puissance sera le même nombre de fois plus grand que celui parcouru par la résistance.*

THÉORIE DU PONT-LEVIS.

42. Soient T le poids du tablier AB (*fig.* 81), c le poids des deux chaînes, F le poids de la flèche A′B′, B le poids de la bascule A′F.

Fig. 81.



Si l'on suppose les forces appliquées sur les horizontales de la figure, en les regardant comme invariablement liées avec le système, et qu'ensuite, en abaissant la bascule, on imprime à la figure un mouvement infiniment petit qui fasse décrire aux points D, D′ les arcs DE, D′E′, on aura, pour les travaux élémentaires des forces, et en nommant ω, ω' les angles de rotation,

$$\mathfrak{T}B = B.A'K'.\omega',$$

$$\mathfrak{T}F = -F.A'n'.\omega',$$

$$\mathfrak{T}\left(\frac{1}{2}c\right) = -\frac{1}{2}c.A'b'.\omega',$$

$$\mathfrak{T}\left(\frac{1}{2}c\right) = -\frac{1}{2}c.Ab.\omega,$$

$$\mathfrak{T}T = -T.Am'.\omega.$$

Égalant à zéro la somme algébrique de ces travaux, on trouve, pour l'équilibre du pont-levis, l'équation unique

$$(1)\quad B.A'K'.\omega' = F.A'n'.\omega' + \frac{1}{2}c.A'b'.\omega' + \frac{1}{2}c.Ab.\omega + T.Am'.\omega.$$

Remarquons maintenant que le quadrilatère infiniment petit DED′E′ a deux côtés opposés DD′, EE′ égaux, et deux autres parallèles DE, D′E′; donc ce quadrilatère est un parallélogramme, et par suite

$$DE = D'E'.$$

Mais

$$DE = AB.\omega, \quad D'E' = A'B'.\omega';$$

donc

$$A'B'.\omega' = AB.\omega:$$

de là on tire

$$(2)\quad \omega' = \frac{AB}{A'B'}\omega.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), elle devient

$$B.A'K'.AB = F.A'n'.AB + \frac{1}{2}c.A'b'.AB$$
$$+ \frac{1}{2}c.Ab.A'B' + T.A'B'.Am'.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$BAD = \alpha, \quad B'A'D' = \alpha',$$

et nous aurons

$$A'K' = \frac{1}{2}A'F.\cos\alpha', \quad A'n' = \frac{1}{2}A'B'.\cos\alpha', \quad A'b' = A'B'.\cos\alpha',$$

$$Ab = AB.\cos\alpha, \quad Am' = \frac{1}{2}AB.\cos\alpha.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$(3)\quad B.A'F.\cos\alpha' = A'B'[(F + c)\cos\alpha' + (T + c)\cos\alpha].$$

Supposons actuellement que pour une position déterminée du système, la figure AB A′B′ soit un parallélogramme, la même

chose aura lieu pour toute autre position, et l'on aura

$$A'B' = AB, \quad \alpha' = \alpha.$$

Par suite, l'équation (3) devient

(4) $$B.A'F = (T + F + 2c)\, AB,$$

laquelle est indépendante de la position du système. En donnant aux diverses parties d'un pont-levis des dimensions et des poids qui satisfassent à l'équation ci-dessus, l'équilibre aura lieu pour toutes les positions possibles, de sorte que pour mouvoir le système, on n'aura que les frottements à vaincre. On tire de l'équation (4)

(5) $$B = \frac{AB}{A'F}(T + F + 2c);$$

et si l'on prend $A'F = AB$, on est conduit à la relation très-simple,

(6) $$B = T + F + 2c.$$

Ce qui fait voir que *lorsque la longueur de la bascule du pont-levis est égale à celle du tablier, le poids de la bascule est égal à la somme des poids du tablier et de la flèche, augmentée du double du poids des chaînes*. Le terme $2c$ peut être négligé sans inconvénient dans l'équation (6), à cause de sa petitesse par rapport à $T + F$.

* Il ne serait pas sans intérêt de savoir si le parallélogramme est le seul quadrilatère qui rende l'équation (3) indépendante des angles α et α'. Pour cela, il suffit d'exprimer que l'équation (3) aura toujours lieu en n'y faisant varier que les angles α, α'; il faut donc y remplacer α par $\alpha + d\alpha$, α' par $\alpha' + d\alpha'$, puis égaler les résultats obtenus, ou, ce qui revient au même, égaler les différentielles des deux membres : on trouve de la sorte, en observant qu'en vertu de l'équation (2)

$$d\alpha' = \frac{AB}{A'B'}\, d\alpha,$$

$$[A'F.B - A'B'(F + c)]\, AB \sin\alpha' = \overline{A'B'}^2 (T + c) \sin\alpha.$$

Mais l'équation (3) peut s'écrire sous la forme

$$[A'F.B - A'B'(F+c)]\cos\alpha' = A'B'(T+c)\cos\alpha.$$

Divisant membre à membre, il vient

$$(7) \qquad AB.\text{tang}\,\alpha' = A'B'.\text{tang}\,\alpha.$$

Différentiant encore une fois, et remplaçant toujours $d\alpha'$ par sa valeur, on trouve

$$(8) \qquad \frac{\overline{AB}^2}{\cos^2\alpha'} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\cos^2\alpha},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9) \qquad \overline{AB}^2(1+\text{tang}^2\alpha') = \overline{A'B'}^2(1+\text{tang}^2\alpha).$$

Eliminant tang α' au moyen de l'équation (7), on obtient

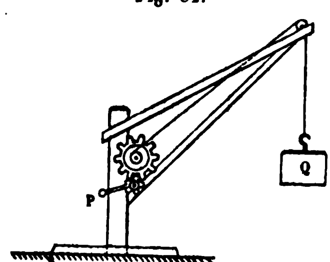
$$A'B' = AB, \quad \text{et ensuite} \quad \alpha' = \alpha;$$

d'où l'on conclut que *le parallélogramme est le seul quadrilatère qui assure l'équilibre du pont-levis, pour toutes les positions possibles.*

DE LA GRUE.

La grue (*fig.* 82) consiste en un treuil dont la corde va s'enrouler sur la gorge d'une poulie fixe, placée à l'extrémité d'un cylindre incliné tel que celui de la figure, et d'une assez grande longueur par rapport aux autres dimensions de la machine. La résistance à soulever est attachée à l'autre extrémité de la corde. L'action de la force motrice se transmet à l'aide d'un système de roues dentées. Toute la machine a la faculté de tourner sur elle-même, ce qui permet de donner à la grue telle position qu'on veut. Quand la résistance a été soulevée à une assez grande hauteur, on fait tourner la grue jusqu'à

Fig. 82.



ce que la charge Q arrive au-dessus du wagon ou du bateau qui doit la recevoir.

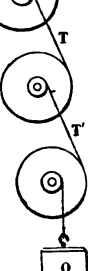
On laisse ensuite aller le treuil sous l'action du poids Q, en ayant seulement la précaution d'empêcher l'accélération du mouvement. Il est évident que les conditions d'équilibre sont les mêmes que dans un système de treuils (*voir* le numéro ci-après); par conséquent, si l'on nomme P la puissance, R, R' les rayons de la manivelle et de la roue, *r*, *r'* ceux du pignon et du cylindre, on aura

$$\frac{P}{Q}=\frac{rr'}{RR'}.$$

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE TREUILS.

43. La puissance P est appliquée sur la roue d'un premier treuil (*fig.* 83), du cylindre ou du *pignon* de celui-ci, par une corde qui va s'enrouler sur la circonférence d'un second treuil, et ainsi de suite; enfin la résistance Q agit sur le pignon du dernier treuil. Il s'agit de trouver le rapport de P à Q.

Fig. 83.



Pour cela, soient T, T', etc., les tensions des cordes; R, *r* les rayons de la roue et du pignon du premier treuil; R' et *r'* les rayons de la roue et du pignon du deuxième treuil, et ainsi de suite.

On aura

pour le premier treuil.... $\frac{P}{T}=\frac{r}{R}$,

pour le deuxième treuil... $\frac{T}{T'}=\frac{r'}{R'}$,

pour le troisième treuil... $\frac{T'}{Q}=\frac{r''}{R''}$....

Multipliant toutes ces égalités membre à membre et simplifiant, il vient

$$\frac{P}{Q}=\frac{rr'r''}{RR'R''}. \tag{1}$$

Ainsi *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.*

Si tous les treuils ont des roues et des pignons de même diamètre respectivement, on aura, en supposant qu'il y ait n treuils,

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{r}{R}\right)^n. \tag{2}$$

Si, par exemple, le système est composé de quatre treuils, et qu'on ait

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{10},$$

l'équation (2) donne

$$P = \frac{Q}{10000}.$$

Si l'on nomme p et q les chemins parcourus par la puissance et la résistance, on trouvera sans peine

$$\frac{p}{q} = \frac{R\,R'\,R''}{r\,r'\,r''}; \tag{3}$$

d'où il résulte que *ce qu'on gagne en force on le perd en vitesse.*

Comme la disposition précédente exige un grand espace, on fait toucher la circonférence de la roue du deuxième treuil par le pignon du premier, de même le pignon du deuxième treuil agit sur la circonférence de la roue du troisième, et ainsi de suite; mais en ayant soin d'armer de dents les circonférences des roues, afin d'empêcher leur glissement sous l'action d'une trop grande résistance. Quant aux conditions d'équilibre, elles restent les mêmes que ci-dessus, du moins aux frottements près.

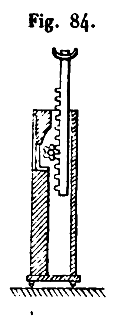
Nous verrons plus tard comment on calcule les frottements dans les engrenages.

DES CRICS.

Le *cric simple* (*fig.* 84) se compose d'un pignon armé de dents qu'on fait tourner à l'aide d'une manivelle. Ce pignon

engrène avec une crémaillère à laquelle il imprime un mouvement rectiligne, et sur laquelle agit la résistance. Ce cric n'étant autre chose qu'un treuil simple, on a pour l'équilibre

Fig. 84.

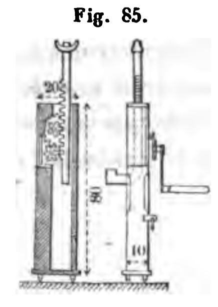


$$(4) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{r}{R},$$

en nommant comme toujours P la puissance, Q la résistance, R le rayon de la manivelle, r le rayon du pignon.

Le *cric composé* (*fig.* 85) est formé d'une crémaillère engrenant avec un premier pignon; sur l'axe de ce pignon est montée une roue dentée engrenant avec un deuxième pignon, lequel est mis en mouvement à l'aide d'une manivelle. Nommant P la puissance, Q la résistance qui s'exerce le long de la crémaillère, R et r le rayon de la manivelle et du premier pignon, R' et r' le rayon de la roue et de son pignon, on a, pour l'équilibre,

Fig. 85.



$$(5) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{rr'}{RR'}.$$

Si, par exemple,

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{5}, \quad \frac{r'}{R'} = \frac{1}{10},$$

on trouve

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{50}.$$

On s'assurerait sans peine que le rapport des chemins parcourus par les points d'applications de la puissance et de la résistance a pour valeur

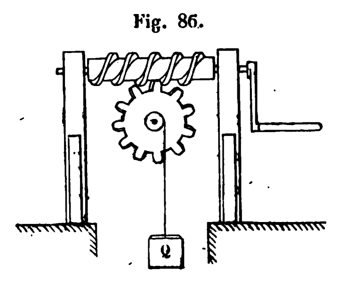
$$(6) \qquad \frac{p}{q} = \frac{RR'}{rr'};$$

de sorte que *ce qu'on gagne en force on le perd en vitesse.*

DE LA VIS SANS FIN.

44. La *vis sans fin* (*fig.* 86) consiste en une vis à filet carré, à laquelle on communique un mouvement de rotation autour de son axe. Cette vis, en tournant, engrène avec une roue dentée dont le plan contient l'axe de la vis. Cette roue, à son tour, porte un pignon sur lequel s'exerce la résistance. Soit P la puissance qui agit sur la manivelle; la vis en tournant exerce parallèlement à sa longueur une certaine pression sur les dents de la roue, et en reçoit une réaction égale et contraire. Désignant cette réaction par s, nommant aussi h le pas de la vis, b le bras de la manivelle, on aura, en faisant abstraction des frottements,

Fig. 86.



$$\frac{P}{s} = \frac{h}{2\pi b}.$$

Mais la force s fait équilibre à la force Q par l'intermédiaire d'un treuil; donc

$$\frac{s}{Q} = \frac{r}{R},$$

R et r étant toujours les rayons de la roue et du pignon.

Multipliant ces deux équations membre à membre et simplifiant, on trouve

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi b}\,\frac{r}{R}.$$

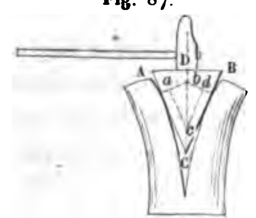
Ce qui fait voir que *dans la vis sans fin, la puissance est à la résistance comme le pas de la vis multiplié par le rayon du pignon est à la circonférence que tend à décrire la puissance, multipliée par le rayon de la roue.*



DU COIN.

45. Le *coin* (*fig.* 87) consiste en un prisme triangulaire à faces AC, BC d'égale largeur. On entre le *coin* entre deux obstacles qu'on veut écarter, puis on exerce une percussion sur la tête AB. Cette percussion se transmet sur les côtés AC, BC, et c'est par l'effet des pressions latérales qui résultent de cette percussion que les obstacles sont écartés.

Fig. 87.



Soit P un poids tombant sur AB d'une hauteur H ; le travail dû à cette chute sera PH, quelle que soit d'ailleurs la courbe décrite (*voir* page 69). Soit aussi $bc = h$ le chemin vertical parcouru par le coin ; R étant la réaction moyenne, le travail dû à cette réaction sera Rh, et l'on aura

$$(1) \qquad Rh = PH.$$

Soit aussi Q la pression latérale transmise à chaque face ; on aura encore

$$Rh = 2Q.ab.$$

Mais les triangles rectangles ADC, *abc* étant semblables, donnent

$$\frac{ab}{\frac{1}{2}AB} = \frac{h}{AC}, \quad \text{d'où} \quad ab = \frac{1}{2}h\frac{AB}{AC}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$(2) \qquad R = Q\frac{AB}{AC};$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad \frac{Q}{R} = \frac{AC}{AB}.$$

Ce qui voir que *la pression exercée sur chaque face du coin est à la pression exercée sur la tête comme le côté du coin est à la largeur de la tête.*

Si, dans l'équation (1), on remplace R par sa valeur (2), on trouve

$$(4) \qquad \frac{Q}{P} = \frac{AC}{AB} \frac{H}{h};$$

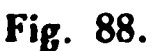
d'où l'on conclut que *la pression exercée sur chaque face est au poids de la masse qui produit la percussion comme le côté du coin multiplié par la hauteur de chute est à la tête multipliée par le chemin vertical décrit par le coin entre les deux obstacles.*

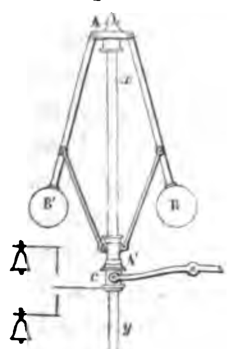
De sorte que si h pouvait se mesurer avec précision, l'équation (4) ferait connaître la valeur absolue de Q.

DOUZIÈME LEÇON.

DU RÉGULATEUR A FORCE CENTRIFUGE.

46. Le *régulateur à force centrifuge,* qu'on nomme aussi *pendule conique*, se compose de quatre tiges articulées dont deux portent des boules très-lourdes. L'anneau A (*fig.* 87) est assujetti sur une tige xy autour de laquelle il ne peut que tourner, tandis que l'anneau ou la douille A′ peut à la fois tourner autour de xy, monter et descendre le long de cette tige. Le système reçoit de l'arbre de la machine un mouvement de rotation qui a pour effet d'écarter ou de rapprocher les boules par les actions centrifuges qu'il développe. Alors la douille s'élève ou s'abaisse, et c'est ce mouvement qu'on met à profit, soit pour ouvrir ou pour fermer un conduit de vapeur, soit, comme dans les moulins à farine, pour mettre en mouvement un jeu de sonnettes ayant des timbres différents. C'est ainsi, par exemple, que le doigt c qui monte ou descend avec la douille A′, vient frapper la tige de la sonnette supérieure, quand la rotation atteint sa plus grande valeur, tandis qu'il agit sur l'autre sonnette quand la vitesse descend jusqu'à sa limite inférieure. Sous la vitesse de régime, le doigt c se meut dans l'intervalle des tiges des deux sonnettes. De la sorte, l'ouvrier qui dirige le moulin est averti si le mouvement est ou trop rapide ou trop lent.


Fig. 88.



Les diverses théories du régulateur à force centrifuge, du moins celles qui sont venues à ma connaissance, négligent presque toutes le poids des tiges, et à plus forte raison les ac-

tions que la force centrifuge exerce sur elles (*); elles conduisent ainsi à une expression remarquable de la hauteur h du pendule conique, savoir

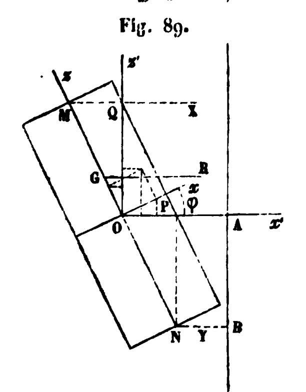
$$h = \frac{g}{\omega^2},$$

dans laquelle g est la gravité, ω la vitesse angulaire de rotation. Mais ce résultat, qui est d'une remarquable simplicité, n'exprime généralement la valeur de h qu'avec une grossière approximation, ainsi qu'on le verra ci-après.

RÉSULTANTE DES ACTIONS CENTRIFUGES SUR UN CYLINDRE D'UN TRÈS-PETIT DIAMÈTRE.

*47. Avant d'aller plus loin, nous allons déterminer le point d'application de la résultante des actions centrifuges sur chacune des tiges du pendule. Pour cela, soit un cylindre dont l'axe MN (*fig.* 88) rencontre l'axe de rotation; le centre de gravité étant au milieu O, l'ordonnée z_1, qui détermine la position de la résultante des actions centrifuges, sera (en ayant égard au signe de a, et prenant pour plan primitif des xy le plan perpendiculaire à l'axe mené par le point O (*voir* p. 76))

Fig. 89.



$$(1) \qquad z_1 = -\frac{1}{ma}\int x'z'dm.$$

Quant à la valeur absolue de a, elle est ici égale à OA. Pour intégrer l'équation (1), nous transformerons d'abord les coordonnées x', z' en d'autres relatives aux axes Ox, Oz, et l'on trouvera sans peine, en nommant φ l'angle aigu que l'axe du cylindre fait avec l'axe de rotation,

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi - z\sin\varphi, \\ z' = x\sin\varphi + z\cos\varphi. \end{cases}$$

(*) M. le général Poncelet est le premier qui ait tenu compte de toutes les forces qui agissent sur le régulateur. (*Voir* le *Traité de Mécanique appliquée aux machines*, page 83.)

A l'aide de ces valeurs, celle de z_1 devient

$$z_1 = -\frac{D \sin \varphi \cos \varphi}{ma}\left(\int x^2 dx\, dy\, dz - \int z^2 dz\, dx\, dy\right),$$

car, dans ce nouveau système de coordonnées, on a évidemment

$$\int xz\, dm = 0.$$

Dans l'équation précédente, D est la masse du corps sous l'unité de volume. Posant, pour abréger,

$$v = \int x^2 dx\, dy\, dz, \quad v' = \int z^2 dz\, dx\, dy,$$

la valeur de z_1 devient

$$z_1 = \frac{D \sin \varphi \cos \varphi}{ma}(v' - v).$$

Nommant l la hauteur du cylindre, puis intégrant par rapport à z depuis $z = -\frac{1}{2} l$ jusqu'à $z = +\frac{1}{2} l$, il vient

$$v = l \int x^2 dx\, dy.$$

Intégrant par rapport à y depuis $y = -y_1$ jusqu'à $y = +y_1$, on trouve

$$v = 2 l \int x^2 dx\, y_1.$$

Quant à y_1 on a, en nommant p le rayon du cylindre,

$$y_1 = \sqrt{p^2 - x^2}.$$

Substituant cette valeur dans celle de v, il vient

$$v = 2 l \int x^2 dx \sqrt{p^2 - x^2}.$$

Pour intégrer cette expression, je remarque que l'on a

$$x^2 dx \sqrt{p^2 - x^2} = -x(p^2 - x^2)\, d.\sqrt{p^2 - x^2};$$

intégrant par parties, et prenant l'intégrale depuis $x = -p$ jusqu'à $x = +p$, on trouve

$$\int_{-p}^{+p} x^2 dx \sqrt{p^2 - x^2} = \frac{1}{4} p^2 \int_{-p}^{+p} dx \sqrt{p^2 - x^2}.$$

Enfin, le même mode d'intégration donne

$$\int_{-p}^{+p} dx\sqrt{p^2 - x^2} = \frac{1}{2}\pi p^2;$$

donc

$$\int_{-p}^{+p} x^2 dx \sqrt{p^2 - x^2} = \frac{1}{8}\pi p^4.$$

Substituant cette valeur dans v, on a finalement

$$v = \frac{1}{4}\pi l p^4.$$

Pareillement, si l'on intègre v' par rapport à z, on trouve

$$v' = \frac{1}{12} l^3 \int dx dy.$$

L'intégration relative à y donne également

$$v' = \frac{1}{6} l^3 \int_{-p}^{+p} dx\sqrt{p^2 - x^2} = \frac{1}{12}\pi p^2 l^3.$$

De la sorte la valeur de z_1 devient

(3) $$z_1 = \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{3}\frac{l^2}{a} - \frac{p^2}{a}\right),$$

en observant que $m = \pi p^2 l\text{D}$.

Si p est très-petit, comme cela a lieu dans le pendule conique, on peut négliger le deuxième terme, et prendre simplement

(4) $$z_1 = \frac{1}{12}\sin\varphi\cos\varphi\frac{l^2}{a}.$$

Posant $\text{NB} = \rho$, et observant que $\text{OP} = \frac{1}{2} l\sin\varphi$, on a pour la valeur de a,

$$a = \rho + \frac{1}{2} l\sin\varphi;$$

par suite, la valeur de z_1 devient

(5) $$z_1 = \frac{1}{12}\sin\varphi\cos\varphi\frac{l^2}{\rho + \frac{1}{2} l\sin\varphi}.$$

De là on conclut

$$(6)\qquad OG = \frac{1}{12}\sin\varphi \frac{l^2}{\rho + \frac{1}{2} l \sin\varphi},$$

$$(7)\qquad MG = \frac{1}{2} l \left(1 - \frac{1}{6}\sin\varphi \frac{l}{\rho + \frac{1}{2} l \sin\varphi}\right),$$

$$(8)\qquad NG = \frac{1}{2} l \left(1 + \frac{1}{6}\sin\varphi \frac{l}{\rho + \frac{1}{2} l \sin\varphi}\right).$$

Si ρ est nul ou très-petit, et si φ n'est pas très-petit, les formules ci-dessus donnent exactement, ou à très-peu près,

$$(9)\qquad \begin{cases} OG = \frac{1}{6} l, \\ MG = \frac{1}{3} l, \\ NG = \frac{2}{3} l; \end{cases}$$

d'où il résulte que *lorsqu'un cylindre d'un très-petit diamètre tourne autour d'un axe, si ce cylindre se termine sur l'axe ou très-près de l'axe, sans faire avec lui un très-petit angle, la résultante des actions centrifuges rencontrera celui du cylindre au tiers de sa longueur, à partir de l'extrémité la plus éloignée de l'axe de rotation, ou aux deux tiers à partir de l'autre extrémité, l'axe du cylindre et l'axe de rotation étant situés dans le même plan.*

Quant à l'intensité de cette résultante, elle se calculera comme si la masse du cylindre était concentrée en un point quelconque de oz'. (*Voir* page 73.)

Maintenant si l'on décompose la force R en deux forces parallèles X, Y, agissant aux points M et N, on trouve

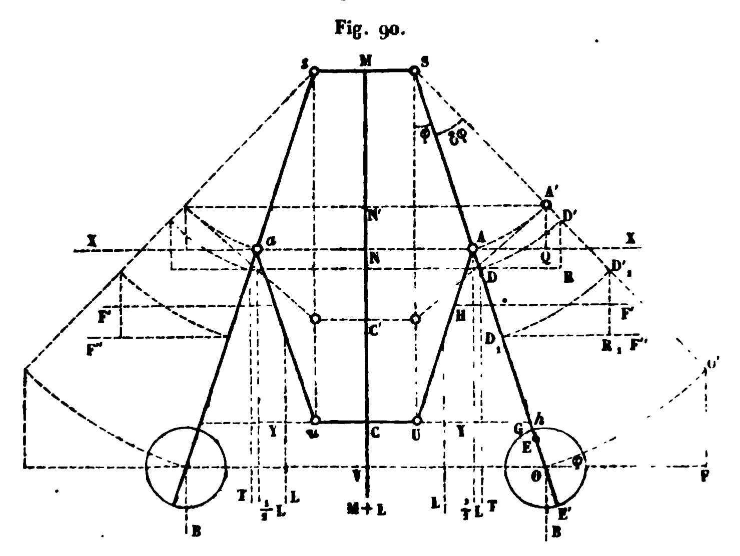
$$(10)\qquad X = \frac{1}{2} R \left(1 + \frac{1}{6}\sin\varphi \frac{l}{\rho + \frac{1}{2} l \sin\varphi}\right),$$

$$(11)\qquad Y = \frac{1}{2} R \left(1 - \frac{1}{6}\sin\varphi \frac{l}{\rho + \frac{1}{2} l \sin\varphi}\right).$$

TRAVAUX ÉLÉMENTAIRES DES FORCES QUI SOLLICITENT LE RÉGULATEUR.

48. Reprenons la question que nous avons en vue. Généralement le pendule conique forme un hexagone tel que celui de la (*fig.* 89), dans lequel les quantités égales MS, M*s*; UC, *u*C

Fig. 90.



sont très-petites. Pour abréger, j'inscris le poids de chaque pièce à l'extrémité de la verticale du centre de gravité; ainsi par exemple T est le poids de la tige SE, L le poids de AU, enfin M est le poids de la douille. Soient aussi F′, F″ les résultantes des actions centrifuges sur les tiges cylindriques telles que AU, SE (je suppose que la tige qui porte la boule pénètre dans celle-ci jusqu'en E). Je puis décomposer F′ en deux forces parallèles X, Y agissant aux points A et U, et l'on aura, en vertu de la formule (10) du numéro précédent,

$$(1)\qquad X = \frac{1}{2}F'\left(1 + \frac{1}{6}\sin\varphi\,\frac{l}{\rho + \frac{1}{2}l\sin\varphi}\right).$$

J'opère une décomposition analogue relativement à la tige *au*. Je puis également remplacer de chaque côté la force

L par deux forces égales à $\frac{1}{2}$L et agissant en A, U et en a, u. Ces dernières se composent à leur tour en une force unique L agissant suivant l'axe de la douille. Enfin j'écris, pour abréger,

$$MS = \rho, \quad SE = \lambda, \quad SA = l, \quad SD_1 = t.$$

Cela posé, j'imprime au système un mouvement infiniment petit qui lui fasse prendre la position accentuée tracée sur la figure. J'aurai d'abord, en nommant F la force centrifuge qui agit sur l'une des boules, et ω la vitesse angulaire de rotation,

$$(2) \qquad F = \frac{B}{g}\omega^2[\rho + (\lambda + r)\sin\varphi].$$

Dans cette formule r est la distance OE, laquelle sera positive ou négative, selon qu'elle sera comptée sur le prolongement de SE ou en sens contraire. Relativement aux autres forces centrifuges, on aura de même

$$(3) \qquad F' = \frac{L}{g}\omega^2\left(\rho + \frac{1}{2}l\sin\varphi\right),$$

$$(4) \qquad F'' = \frac{T}{g}\omega^2\left(\rho + \frac{1}{2}\lambda\sin\varphi\right).$$

Cela posé, les travaux élémentaires des forces qui agissent sur le système auront les valeurs ci-après :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{T}\,2F = 2F(\lambda + r)\cos\varphi\delta\varphi, \\ & \mathfrak{T}\,2X = F' l \cos\varphi\left(1 + \frac{1}{6}\sin\varphi\frac{l}{\rho + \frac{1}{2}l\sin\varphi}\right)\delta\varphi, \\ & \mathfrak{T}\,2Y = 0; \\ & \mathfrak{T}\,2F'' = 2F'' t\cos\varphi\delta\varphi, \\ & \mathfrak{T}\,2B = -2B(\lambda + r)\sin\varphi\delta\varphi, \\ & \mathfrak{T}\,2T = -T\lambda\sin\varphi\delta\varphi, \\ & \mathfrak{T}\,2\left(\frac{1}{2}L\right) = -Ll\sin\varphi\delta\varphi. \\ & \text{On a aussi} \\ & \mathfrak{T}(M + L) = -2(M + L)l\sin\varphi\delta\varphi. \end{aligned} \right.$$

En effet

$$\mathfrak{T}(\mathrm{M}+\mathrm{L}) = -2(\mathrm{M}+\mathrm{L})\,\mathrm{CC}'.$$

Mais il est aisé de voir que

$$\mathrm{CC}' = 2\,\mathrm{NN}' = 2\,\mathrm{A'Q} = 2\,l\sin\varphi\delta\varphi;$$

donc

$$\mathfrak{T}.(\mathrm{M}+\mathrm{L}) = -2(\mathrm{M}+\mathrm{L})\,l\sin\varphi\delta\varphi.$$

Egalant à zéro la somme algébrique de ces travaux, et observant que

$$h = (\lambda + r)\cos\varphi, \tag{6}$$

on trouve, en remplaçant les forces centrifuges par leurs valeurs,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} h = {} & \frac{g}{\omega^2}\,\frac{(\lambda+r)\sin\varphi}{\rho+(\lambda+r)\sin\varphi} + \frac{g}{\omega^2}\,\frac{\mathrm{T}\lambda+(2\,\mathrm{M}+3\,\mathrm{L})\,l}{2\,\mathrm{B}[\rho+(\lambda+r)\sin\varphi]}\sin\varphi \\ & - \frac{\mathrm{L}\,l(\rho+\frac{2}{3}\,l\sin\varphi)+2\,\mathrm{T}\,t(\rho+\frac{1}{2}\lambda\sin\varphi)}{2\,\mathrm{B}[\rho+(\lambda+r)\sin\varphi]}\cos\varphi. \end{aligned} \right.$$

Remarquons maintenant que l'on a, en vertu de l'équation (8) du numéro précédent,

$$t = \frac{1}{2}\lambda\left(1+\frac{1}{6}\sin\varphi\,\frac{\lambda}{\rho+\frac{1}{2}\lambda\sin\varphi}\right). \tag{8}$$

Pour $\rho = 0$, cette formule donne

$$t = \frac{2}{3}\lambda. \tag{9}$$

Maintenant si dans la formule (7) on fait également $\rho = 0$, elle devient

$$h = \frac{g}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}\,\frac{\mathrm{T}\lambda+(2\,\mathrm{M}+3\,\mathrm{L})\,l}{2\,\mathrm{B}(\lambda+r)} - \frac{\mathrm{L}\,l^2+\mathrm{T}\lambda^2}{3\,\mathrm{B}(\lambda+r)^2}\,h. \tag{10}$$

* Proposons-nous actuellement d'avoir égard à la quantité ρ que nous venons de négliger. A cet effet nous ferons d'abord observer que pour $\rho = 0$,

$$\frac{dt}{d\rho} = -\frac{1}{3\sin\varphi}. \tag{11}$$

Cela posé, si l'on développe l'équation (7) suivant les puis-

sances croissantes de ρ, on aura pour la correction δh de h, et en ne conservant que les termes du premier ordre par rapport à ρ,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \delta h = &-\frac{g}{\omega^2}\frac{\rho}{(\lambda+r)\sin\varphi}\left(1+\frac{K}{B}\right)\\ &-\frac{h\rho}{2B(\lambda+r)^2\sin\varphi}\left(T\lambda+Ll-\frac{2}{3}\frac{T\lambda^2+Ll^2}{\lambda+r}\right),\end{aligned}\right.$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$(13)\qquad K=\frac{T\lambda+(2M+3L)l}{2(\lambda+r)}.$$

Comme le second terme de cette équation est très-petit, à cause du diviseur B, on peut prendre simplement

$$(14)\qquad \delta h=-\frac{g}{\omega^2}\frac{\rho}{(\lambda+r)\sin\varphi}\left(1+\frac{K}{B}\right).$$

Si l'on veut avoir égard au deuxième terme de la formule (12), il suffira d'y remplacer h par la valeur de cette quantité qui résulte de la première approximation. Nous remarquerons que l'équation (7) exprime la valeur exacte de h (du moins à la quantité près de l'ordre de ρ^2 que nous avons négligée dans la formule (3) du n° 47) quand la douille est à l'état de repos, car alors elle n'agit plus sur les leviers de manœuvre qu'elle doit entraîner. Si l'équation dont il s'agit devait exprimer les conditions du mouvement de la douille, il faudrait encore avoir égard aux frottements sur les articulations des tiges et des leviers. Mais nous remarquerons que si l'on nomme ρ_1, le rayon d'un tourillon, f le coefficient du frottement qui est ici très-petit, parce que le système est toujours tenu bien huilé, N la pression normale qui s'exerce au point de rotation entre le tourillon et l'œil, le glissement aura pour valeur $\rho_1\delta\psi$, en nommant $\delta\psi$ l'angle qui répond à l'arc de glissement; par suite le travail absorbé sera

$$\varpi=-Nf\rho_1\delta\psi.$$

Mais $\delta\psi$ et $\delta\varphi$ sont des quantités de même ordre; posant

$\frac{\delta\psi}{\delta\varphi} = \varepsilon$, ε étant un nombre fini, la valeur de $\mathfrak{T}$ devient

$$\mathfrak{T} = -\mathrm{N}f\rho_1 \varepsilon\delta\varphi,$$

qui est une quantité négligeable par rapport aux autres travaux élémentaires. *Donc l'équation* (7) *peut être regardée comme étant l'équation du mouvement vertical du système, quelle que soit d'ailleurs la nature de ce mouvement.* La démonstration précédente suppose que ε est un petit nombre; et en effet, on trouve par les règles qui servent à déterminer le glissement infiniment petit entre deux courbes que $\varepsilon = 2$ en A et a, tandis que $\varepsilon = 1$ pour les autres articulations (*).

Si la résistance $\delta\mathrm{M}$ que les leviers de manœuvre opposent au mouvement n'était pas négligeable, il suffirait, pour y avoir égard, de remplacer dans les équations précédentes le poids M de la douille par $\mathrm{M} + \delta\mathrm{M}$, la résistance $\delta\mathrm{M}$ étant positive quand elle s'ajoute au poids de la douille, négative dans le cas contraire.

Si l'on pose maintenant

(15) $$\mathrm{K}' = \frac{\mathrm{L}l^2 + \mathrm{T}\lambda^2}{3(\lambda + r)^2},$$

(*) Cherchons, par exemple, le glissement qui a lieu au point A. On verra (n° 71) que le déplacement élémentaire de la tige AU équivaut à une rotation infiniment petite autour du point h; donc si le point U parcourt un espace égal à CC', on aura, en nommant ω la rotation infiniment petite autour du centre instantané h,

$$\omega . h\mathrm{U} = \mathrm{CC}'.$$

Mais

$$\mathrm{CC}' = 2\mathrm{NN}' = 2l\delta\varphi \sin\varphi \quad \text{et} \quad h\mathrm{U} = 2l\sin\varphi;$$

remplaçant, dans l'égalité précédente, CC' et hU par leurs valeurs, il vient

$$\omega = \delta\varphi.$$

Imprimons maintenant aux tiges SA, AU un mouvement commun de rotation $\delta\varphi$ autour de l'axe S, et en sens contraire du mouvement de SA; de la sorte la tige SA sera réduite au repos, mais alors la tige AU sera animée de deux rotations égales à $\delta\varphi$ et dirigées dans le même sens. Ces deux rotations se composeront en une seule autour de l'axe A, laquelle sera égale à leur somme. Par conséquent, on aura

$$\delta\psi = 2\delta\varphi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

l'équation (10) devient, en ayant égard à (13),

$$h\omega^2(B+K')=g(B+K).$$

Pour une autre position de la douille, on aurait pareillement

$$h'\omega'^2(B+K')=g(B+K).$$

De la comparaison de ces deux équations, on tire

$$\frac{h}{h'}=\frac{\omega'^2}{\omega^2}.$$

Ce qui démontre que *les hauteurs d'un pendule conique sont, à très-peu près, en raison inverse des carrés des vitesses angulaires correspondantes.* De sorte que si l'on pouvait mesurer la hauteur h qui répond à une vitesse donnée, on aurait pour la hauteur h', relative à une autre vitesse aussi donnée,

$$h'=\frac{\omega^2}{\omega'^2}h.$$

Pour un second pendule qui tournerait avec la vitesse du premier, on aurait pareillement

$$H\omega^2(B_0+K'_0)=g(B_0+K_0).$$

Comparant avec l'équation

$$h\omega^2(B+K')=g(B+K),$$

on trouve

$$\frac{h}{H}=\frac{B+K}{B+K'}:\frac{B_0+K_0}{B_0+K'_0},$$

laquelle pourrait servir à déterminer h au moyen de H, et réciproquement.

CALCUL DU POIDS DES BOULES SOUS LA CONDITION QU'ELLES AIENT UNE COURSE VERTICALE DONNÉE.

49. Soit ω la vitesse angulaire de régime, ω' et ω'' la plus grande et la plus petite vitesse du régulateur; h, h', h'' étant les hauteurs correspondantes, c la course verticale des boules, on aura, pour déterminer les quatre inconnues h, h', h'', B, à

résoudre les quatre équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} h\,\omega^2\ (B+K') &= g\,(B+K),\\ h'\,\omega'^2\ (B+K') &= g\,(B+K),\\ h''\,\omega''^2\,(B+K') &= g\,(B+K),\\ h''-h' &= c; \end{aligned}\right.$$

lesquelles donnent

$$(2)\qquad h=\frac{\omega'^2\,\omega''^2}{\omega^2\,(\omega'^2-\omega''^2)}\,c,$$

$$(3)\qquad h'=\frac{\omega''^2}{\omega'^2-\omega''^2}\,c,$$

$$(4)\qquad h''=\frac{\omega'^2}{\omega'^2-\omega''^2}\,c,$$

$$(5)\qquad B=\frac{K\,g\,(\omega'^2-\omega''^2)-K'\,c\,\omega'^2\,\omega''^2}{c\,\omega'^2\,\omega''^2-g\,(\omega'^2-\omega''^2)}.$$

Soit maintenant n un nombre entier donné, on pourra poser

$$(6)\qquad \omega'=\omega+\frac{\omega}{n},\quad \omega''=\omega-\frac{\omega}{n};$$

de là on tire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega'^2+\omega''^2=2\,\omega^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\\ &\omega'^2-\omega''^2=\frac{4\,\omega^2}{n},\quad \omega'^2\,\omega''^2=\omega^4\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Substituant ces valeurs dans les équations ci-dessus, on trouve

$$(8)\qquad h=\frac{(n^2-1)^2}{4\,n^3}\,c,$$

$$(9)\qquad h'=\frac{(n-1)^2}{4\,n}\,c,$$

$$(10)\qquad h''=\frac{(n+1)^2}{4\,n}\,c,$$

$$(11)\qquad B=\frac{4\,K\,ng-K'\,c\,\omega^2\left(\dfrac{n^2-1}{n}\right)^2}{c\,\omega^2\left(\dfrac{n^2-1}{n}\right)^2-4\,ng}.$$

Maintenant désignons par N le nombre de tours que le régulateur fait en une minute, on aura la relation

$$\omega . 60 = 2\pi N,$$

d'où l'on tire

(12) $$\omega = \frac{\pi N}{30}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), on trouve

(13) $$B = \frac{Kng - K'c \frac{\pi^2 N^2}{3600}\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2}{\frac{\pi^2 N^2}{3600}\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 c - ng}.$$

Comme on pourrait obtenir pour B des valeurs trop grandes ou trop petites, on posera $B > B_0$, $B < B_1$, et l'on aura pour $B < B_1$

(14) $$N > \frac{60}{\pi}\left(\frac{n}{n^2-1}\right)\sqrt{\frac{ng}{c}\frac{B_1+K}{B_1+K'}},$$

pour $B > B_0$

(15) $$N < \frac{60}{\pi}\left(\frac{n}{n^2-1}\right)\sqrt{\frac{ng}{c}\frac{B_0+K}{B_0+K'}}.$$

Désignons encore par h'_0, h''_0 des valeurs telles, qu'on ait

$$h' > h'_0, \quad h' < h''_0;$$

remplaçant h' et h'' par leurs valeurs, puis résolvant par rapport à c, on obtient les limites de la course verticale des boules, savoir

(16) $$c > \frac{4n}{(n-1)^2} h'_0,$$

(17) $$c < \frac{4n}{(n+1)^2} h''_0.$$

Toutefois h'_0 et h''_0 ne sont pas complétement arbitraires, attendu qu'on doit avoir

$$\frac{4n}{(n+1)^2} h''_0 > \frac{4n}{(n-1)^2} h'_0,$$

ce qui donne

(18) $$\frac{h'_0}{h''_0} < \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2.$$

Telle est la dépendance qu'il faut établir entre les hauteurs limites qu'on assigne au pendule conique.

Soit encore h_1 la hauteur MC de la douille, on aura

$$h_1 = 2\,l\cos\varphi.$$

Mais on a déjà

$$h = (\lambda + r)\cos\varphi;$$

donc

(19) $$h_1 = \frac{2\,l}{\lambda + r}h.$$

On aura de même

$$h''_1 = \frac{2\,l}{\lambda + r}h'',$$

$$h'_1 = \frac{2\,l}{\lambda + r}h'.$$

Retranchant membre à membre, posant $h''_1 - h'_1 = \gamma$, et observant que $h'' - h' = c$, il vient

(20) $$c = \frac{\lambda + r}{2\,l}\gamma.$$

Substituant cette valeur dans les inégalités (16) et (17), puis résolvant par rapport à γ, on trouve pour les limites de la course de la douille,

(21) $$\gamma > \frac{8n}{(n-1)^2}\frac{lh'_0}{\lambda + r},$$

(22) $$\gamma < \frac{8n}{(n+1)^2}\frac{lh''_0}{\lambda + r}.$$

On voit par la formule (19) que h_1 sera plus grand que h, toutes les fois qu'on aura

$$l > \frac{1}{2}(\lambda + r).$$

Nous ferons remarquer que le choix des quantités h'_0, h''_0 n'a rien d'absolu; seulement on évitera par leur emploi d'obtenir pour h' et h'' des valeurs inacceptables.

Les limites de N s'expriment aussi en fonction de h'_0, h''_0. On trouve sans peine, à l'aide de la première des équations (1),

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} N > \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{h''_0} \frac{B+K}{B+K'}}, \\ N < \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{h'_0} \frac{B+K}{B+K'}}. \end{array} \right.$$

Maintenant pour savoir quels sont les nombres qu'on peut choisir parmi ceux qui sont compris entre ces limites, on remarquera que la course des boules devant se faire entre h'_0 et h''_0, on devra avoir, en désignant par N_0 et N_1 les deux limites ci-dessus,

$$\frac{N}{n} < N - N_0, \quad \frac{N}{n} < N_1 - N;$$

d'où l'on tire

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} N > \frac{n}{n-1} N_0, \\ N < \frac{n}{n+1} N_1. \end{array} \right.$$

Telles sont les limites entre lesquelles il faudra choisir la valeur de N.

Toutefois, pour que ces limites ne soient pas contradictoires, il faudra qu'on ait

$$\frac{n}{n+1} N_1 > \frac{n}{n-1} N_0,$$

d'où

$$n > \frac{N_1 + N_0}{N_1 - N_0}.$$

Dans la pratique, les tiges qui supportent les boules du régulateur les traversent dans toute leur étendue, il en résulte qu'il faut prendre pour r, qui entre dans K et K', le rayon de la boule. Mais ce rayon dépend lui-même du poids, car en

nommant D ce poids sous l'unité de volume, on a

$$B = -\frac{4}{3}\pi r^3 D. \tag{25}$$

Je mets le signe — à cause qu'ici la quantité r est négative, étant comptée en sens inverse du prolongement de la tige. En éliminant B entre les relations (13) et (25), on aurait une équation du cinquième degré qui servirait à déterminer r; r étant connu, l'une ou l'autre des équations citées ferait connaître B. Mais ici l'on peut éviter l'emploi de l'équation du cinquième degré; pour cela il suffira de prendre pour λ non pas SE′ mais SO, et faisant par conséquent $r = 0$ dans les relations qui contiennent cette quantité : toutefois il doit être entendu que le point D sera alors le centre de gravité de SO et non pas de SE′; de même D_1 sera le point d'application de la force centrifuge sur SO, et non pas sur SE′. B étant connu, la relation entre le volume et le poids déterminera le rayon de la boule. Mais on remarquera que la formule (13) donne le poids qui répond à l'équilibre, comme si la tige s'étendait jusqu'en O seulement; la valeur trouvée pour B est donc le poids de la boule supposée vide dans l'intervalle occupé par la partie OG de la tige. En second lieu, comme celle-ci s'étend jusqu'en E′, c'est comme si l'on substituait, de O jusqu'en E′, la matière de la tige à celle de la boule; le poids de la boule telle qu'on l'emploiera, sera donc en erreur de la différence entre le poids de la matière de la boule occupée par OE′ et le poids de OE′, ce qui est une approximation certainement suffisante : d'ailleurs on pourrait substituer ce poids dans les équations (10) et (12) du n° 48, et l'on obtiendrait la valeur exacte de h. On déterminerait de la même manière h' et h'' dont la différence ferait connaître la course verticale des boules, et par suite celle de la douille.

CALCUL DE LA LIMITE INFÉRIEURE DU POIDS DES BOULES.

La limite inférieure $B > B_0$ que nous avons employée précédemment n'est pas arbitraire. Il faut la déterminer sous la

condition que s'il survient une variation $\delta\omega$ de vitesse, les boules soient capables de vaincre la résistance qu'opposent les leviers de manœuvre. Reprenons l'équation

$$h\omega^2 = g\frac{B+K}{B+K'}.$$

Si la vitesse de rotation devient $\omega+\delta\omega$, et que la résistance à vaincre soit δM, K deviendra $K+\delta K$, et l'on aura pour l'équation de l'équilibre du système,

$$h(\omega+\delta\omega)^2 = g\frac{B+K}{B+K'}.$$

Divisant cette équation par la précédente, on trouve

$$\left(1+\frac{\delta\omega}{\omega}\right)^2 = 1+\frac{\delta K}{B+K};$$

développant et résolvant par rapport à $B+K$, il vient

(26) $$B+K = \frac{\delta K}{\frac{\delta\omega}{\omega}\left(2+\frac{\delta\omega}{\omega}\right)}.$$

δK étant donné, supposons qu'on veuille donner aux boules un poids tel, que la douille puisse mouvoir les leviers de manœuvre avant que la vitesse ait varié de la quantité $\delta\omega = \frac{\omega}{n}$. Pour cela, nous examinerons les deux cas où $\delta\omega$ sera positif ou négatif.

Premier cas. Comme

$$B+K = \frac{\delta K}{\frac{\delta\omega}{\omega}\left(2+\frac{\delta\omega}{\omega}\right)},$$

si l'on remplace $\frac{\delta\omega}{\omega}$ par $\frac{1}{n}$, le deuxième membre deviendra trop petit, et l'on aura, pour déterminer la limite inférieure de B,

$$B+K > \frac{n^2}{2n+1}\delta K.$$

Deuxième cas. $\delta\omega$ étant négatif, il en sera de même de δK;

alors si l'on ne tient compte que des valeurs absolues de ces quantités, la valeur de B + K sera

$$(27) \qquad B + K = \frac{\delta K}{\frac{\delta\omega}{\omega}\left(2 - \frac{\delta\omega}{\omega}\right)}.$$

Mais le dénominateur de cette équation est une fonction croissante de $\delta\omega$, donc si l'on remplace encore $\frac{\delta\omega}{\omega}$ par $\frac{1}{n}$, on aura

$$B + K > \frac{n^2}{2n - 1}\delta K.$$

En comparant les deux valeurs précédentes de la limite inférieure de B + K, on voit qu'il suffira de prendre, dans tous les cas,

$$B > \frac{n^2}{2n - 1}\delta K - K;$$

par conséquent,

$$(28) \qquad B_0 = \frac{n^2}{2n - 1}\delta K - K.$$

Il est facile de s'assurer à priori que toute valeur de B satisfaisant à cette limite, produira l'effet désiré. Pour le faire voir, posons, pour abréger,

$$\text{fonct.}\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right) = B + K - \frac{\delta K}{\frac{\delta\omega}{\omega}\left(2 + \frac{\delta\omega}{\omega}\right)}.$$

Si dans cette équation on fait $\delta\omega = 0$, on a

$$\text{fonct.}\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right) < 0.$$

Ensuite, si l'on pose

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{n},$$

il viendra

$$\text{fonct.}\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right) > 0.$$

Par conséquent, entre

$$\delta\omega = 0 \quad \text{et} \quad \delta\omega = \frac{\omega}{n}$$

il existe une valeur de $\delta\omega$ pour laquelle

$$\text{fonct.}\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)=0;$$

de sorte que pour cette valeur de la variation de la vitesse, le régulateur pourra soulever la résistance à vaincre.

On voit par la formule (28) que B sera d'autant plus grand, que le nombre n, que j'appellerai *coefficient de sensibilité*, sera lui-même plus grand.

Quant à la valeur de δK, elle se déduit sans peine de la formule (13) du n° 48, laquelle donne, en faisant comme précédemment $r=0$,

$$\delta K=\frac{l}{\lambda}\,\delta M. \qquad (29)$$

Si l'on suppose par exemple $\delta M = 2^{kil},5$, et qu'on adopte les données de l'exemple ci-après, on trouve d'abord

$$\delta K=\frac{5}{3}.$$

La formule (28) donne ensuite, en observant que K = 11,6629,

$$B_0 = 13^{kil},76.$$

FORMULES A EMPLOYER DANS LA PRATIQUE POUR LE CALCUL D'UN RÉGULATEUR, ALORS QUE LES TIGES SONT CYLINDRIQUES.

50. Nommons D le poids de la matière des tiges du régulateur sous l'unité de volume, p le rayon des tiges l, p' celui des tiges λ, on aura

$$L=\pi p^2 l D,\quad T=\pi p'^2\lambda D,$$

et la valeur de K deviendra, en y faisant $r=0$,

$$K=\frac{2Ml+\pi D(3p^2l^2+p'^2\lambda^2)}{2\lambda}. \qquad (1)$$

Si $p'=p$,

$$K=\frac{2Ml+\pi Dp^2(3l^2+\lambda^2)}{2\lambda}. \qquad (2)$$

On aura de même

$$K' = \frac{\pi D(p^2 l^3 + p'^2 \lambda^3)}{3\lambda^2}, \tag{3}$$

et dans le cas de $p' = p$,

$$K' = \frac{\pi p^2 D(l^3 + \lambda^3)}{3\lambda^2}. \tag{4}$$

Les autres formules à employer seront, en les rangeant dans l'ordre suivant lequel on pourra les calculer,

$$\frac{h'_0}{h''_0} < \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma > \dfrac{8n}{(n-1)^2}\,\dfrac{l}{\lambda}\,h'_0, \\ \gamma < \dfrac{8n}{(n+1)^2}\,\dfrac{l}{\lambda}\,h''_0, \end{array}\right. \tag{6}$$

$$c = \frac{\lambda}{2l}\,\gamma, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{array}{l} N > \dfrac{60}{\pi}\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\sqrt{\dfrac{ng}{c}\,\dfrac{B_1+K}{B_1+K'}}, \\ N < \dfrac{60}{\pi}\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\sqrt{\dfrac{ng}{c}\,\dfrac{B_0+K}{B_0+K'}}, \end{array}\right. \tag{8}$$

$$B = \frac{Kng - K'c\,\dfrac{\pi^2 N^2}{3600}\left(\dfrac{n^2-1}{n}\right)^2}{\dfrac{\pi^2 N^2}{3600}\left(\dfrac{n^2-1}{n}\right)^2 c - ng}, \tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{l} h = \dfrac{(n^2-1)^2}{4n^3}\,c, \\ h' = \dfrac{(n-1)^2}{4n}\,c, \\ h'' = \dfrac{(n+1)^2}{4n}\,c, \end{array}\right. \tag{10}$$

$$(11)\quad \begin{cases} h_1 = \dfrac{2l}{\lambda} h, \\ h'_1 = \dfrac{2l}{\lambda} h', \\ h''_1 = \dfrac{2l}{\lambda} h'', \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \delta h = -\dfrac{900\,g}{\pi^2 N^2} \dfrac{\rho}{\lambda \sin\varphi}\left(1+\dfrac{K}{B}\right) \\ \qquad -\dfrac{\pi D h \rho}{2 B \lambda^2 \sin\varphi}\left(p'^2\lambda^2 + p^2 l^2 - \dfrac{2}{3}\dfrac{p'^2\lambda^3 + p^2 l^3}{\lambda}\right). \end{cases}$$

Si $p' = p$,

$$(13)\quad \begin{cases} \delta h = -\dfrac{900\,g}{\pi^2 N^2} \dfrac{\rho}{\lambda \sin\varphi}\left(1+\dfrac{K}{B}\right) \\ \qquad -\dfrac{\pi p^2 D h \rho}{2 B \lambda^2 \sin\varphi}\left(\lambda^2 + l^2 - \dfrac{2}{3}\dfrac{\lambda^3 + l^3}{\lambda}\right). \end{cases}$$

Négligeant le deuxième terme,

$$(14)\qquad \delta h = -\frac{900\,g}{\pi^2 N^2} \frac{\rho}{\lambda \sin\varphi}\left(1+\frac{K}{B}\right).$$

On voit par là que la même correction conviendra, à très-peu près, aux deux hauteurs extrêmes h', h''. La première des équations (11) donne ensuite

$$(15)\qquad \delta h_1 = \frac{2l}{\lambda}\,\delta h.$$

Appliquons ces formules à un exemple numérique.

Supposons

$\lambda = 0^m,75$, $l = 0^m,50$, $\rho = 0^m,02$, $p = 0^m,02$, $n = 30$, $M = 3^k$;

si les tiges sont en cuivre, on aura

$$D = 8788.$$

Si nous prenons

$$h''_0 = 0^m,6,$$

la formule (5) donnera

$$h'_0 < 0^m,525;$$

nous prendrons

$$h'_0 = 0^m,50.$$

On tire ensuite des formules (6)

$$\begin{cases} \gamma > 0^m,095, \\ \gamma < 0^m,0999; \end{cases}$$

nous adopterons

$$\gamma = 0^m,096.$$

Après cela, on a, par la formule (7),

$$c = 0^m,072.$$

Prenant pour les limites de B

$$B_0 = 15^k, \quad B_1 = 60^k,$$

les formules (8) donnent

$$\begin{cases} N > 43,2572, \\ N < 48,81; \end{cases}$$

nous adopterons

$$N = 47.$$

Alors, par la formule (9), on trouve

$$B = 20^k,87.$$

On déduit ensuite des relations (10) et (11)

$$\begin{aligned} h &= 0^m,5388, & h_1 &= 0^m,7184, \\ h' &= 0^m,5046, & h'_1 &= 0^m,6728, \\ h'' &= 0^m,5766, & h''_1 &= 0^m,7688. \end{aligned}$$

En calculant les deux termes de la formule (13), on obtient

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}} \text{ terme} &= -0^m,0242 \\ 2^{\text{e}} \text{ terme} &= -0^m,0024 \end{aligned}$$

d'où

$$\delta h = -0^m,0266.$$

Enfin la formule (15) donne, pour la correction de h_1,

$$\delta h_1 = -0^m,0355.$$

RÉSULTATS DÉFINITIFS.

$$\gamma = 0^m,096, \quad c = 0^m,072, \quad N = 47, \quad B = 20^k,87,$$
$$h = 0^m,5122, \quad h_1 = 0^m,6829,$$
$$h' = 0^m,478, \quad h'_1 = 0^m,6373,$$
$$h'' = 0^m,55, \quad h''_1 = 0^m,7333.$$

Nous ferons remarquer que si, dans la formule (10) du n° 48, on suppose nul le poids des tiges, on aura simplement

$$h = \frac{g}{\omega^2} = \frac{900 g}{\pi^2 N^2}.$$

Si dans cette formule on fait $N = 47$, il vient

$$h = 0^m,4049,$$

tandis que la valeur exacte de h est

$$h = 0^m,5122:$$

l'erreur commise est donc environ de $0^m,11$.

Nous observerons encore que si, dans la valeur (9) de B, on fait $K' = 0$, ce qui revient à faire abstraction de la force centrifuge sur les tiges, on trouve

$$B = 35^k,2724.$$

Le terme dû à l'action de la force centrifuge sur les tiges diminue donc la valeur de B de $14^k,4025$. On voit par là que le poids des tiges, ainsi que l'action que la force centrifuge exerce sur elles, ne sont pas généralement des quantités négligeables.

CALCUL DE LA HAUTEUR D'UN RÉGULATEUR RÉPONDANT A UN POIDS DE BOULES CAPABLE DE SOULEVER UNE RÉSISTANCE DONNÉE.

Proposons-nous, pour deuxième exemple, de calculer la hauteur h *qui répond à un poids de boules capable de soule-*

ver une résistance donnée. Prenons

$$\lambda = 0^m,75,\quad l = 0^m,5\quad p = 0^m,005,$$
$$\rho = 0^m,02,\quad n = 60,\quad M = 2^k,\quad \delta M = 1^k,$$
$$D = 8788^k,\quad h'_0 = 0^m,5.\quad h''_0 = 0^m,6.$$

Les formules (2) et (4) donnent d'abord

$$K = 0^m,603932,\quad K' = 0,223678:$$

on déduit ensuite de l'équation (28) du numéro précédent

$$B_0 = 19^k,564;$$

et comme on doit avoir $B > B_0$, nous prendrons

$$B = 20^k.$$

Les inégalités (23) du numéro cité donnent à leur tour

$$\begin{cases} N > 38,97, \\ N < 49,69; \end{cases}$$

d'où l'on tire, à l'aide des relations (24) du même numéro,

$$\begin{cases} N > 39,63, \\ N < 41,99. \end{cases}$$

Adoptant

$$N = 40,$$

on obtient, par la première des équations (1) du n° 49,

$$h = 0^m,5695.$$

Cette valeur, substituée dans la première des équations (11) du présent numéro, donne

$$h_1 = 0^m,7594.$$

Enfin, à l'aide des relations (14) et (15), on trouve

$$\delta h = -0^m,0024,\quad \delta h_1 = -0^m,0032.$$

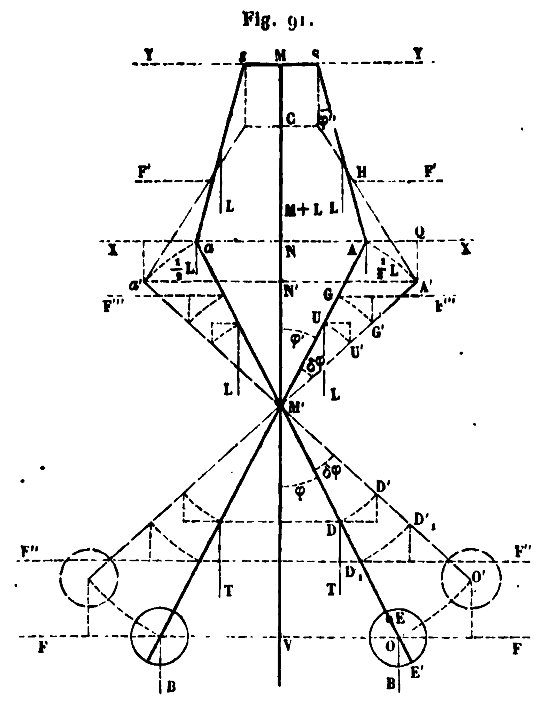
Et l'on voit que ces corrections sont ici sans importance.

RÉGULATEUR A TIGES OPPOSÉES.

51. Dans certains pendules coniques, les tiges qui portent les boules sont prolongées de l'autre côté du centre fixe M'

(*fig.* 91) de rotation, soit en ligne droite, soit sous un angle θ

Fig. 91.



que nous supposerons peu différent de 180 degrés. Nous prendrons pour θ l'angle OM'a tourné vers la droite; de sorte qu'on aura, en désignant par ε un petit angle positif ou négatif,

$$(1)\qquad \theta = 180^\circ + \varepsilon.$$

On peut remarquer, avant d'aller plus loin, que les angles φ, φ', φ'' sont liés par les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin\varphi' = -\sin(\varphi+\theta), \\ \cos\varphi' = -\cos(\varphi+\theta), \\ \sin\varphi'' = -\left[\dfrac{\rho}{l} + \sin(\varphi+\theta)\right]; \end{cases}$$

on a aussi, en vertu de l'équation (1),

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin(\varphi+\theta) = -\sin(\varphi+\varepsilon), \\ \cos(\varphi+\theta) = -\cos(\varphi+\varepsilon). \end{cases}$$

Adoptant les mêmes notations que précédemment, on obtient, pour les actions centrifuges résultantes qui agissent sur les boules et sur les tiges,

$$(4)\quad \begin{cases} F = \dfrac{B}{g}\omega^2(\lambda + r)\sin\varphi, \\ F' = \dfrac{1}{2}\dfrac{L}{g}\omega^2[\rho - l\sin(\varphi + \theta)], \\ F'' = \dfrac{1}{2}\dfrac{T}{g}\omega^2\lambda\sin\varphi, \\ F''' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{L}{g}\omega^2 l\sin(\varphi + \theta). \end{cases}$$

De la valeur de F' on déduit aussi sans peine

$$(5)\qquad X = \frac{1}{3}\frac{\omega^2}{g}Ll\left[\frac{\rho}{l} - \sin(\varphi + \theta)\right].$$

Après cela on trouve successivement que les travaux élémentaires des diverses forces qui sollicitent le système ont pour valeurs,

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}\,2F = 2\dfrac{B}{g}\omega^2(\lambda + r)^2\sin\varphi\cos\varphi\,\delta\varphi, \\ \mathfrak{T}\,2X = -\dfrac{2}{3}\dfrac{\omega^2}{g}Ll\cos(\varphi + \theta)[\rho - l\sin(\varphi + \theta)]\,\delta\varphi, \\ \mathfrak{T}\,2Y = 0, \\ \mathfrak{T}\,2F'' = \dfrac{2}{3}\dfrac{T}{g}\omega^2\lambda^2\sin\varphi\cos\varphi\,\delta\varphi, \\ \mathfrak{T}\,2F''' = \dfrac{2}{3}\dfrac{L}{g}\omega^2 l^2\sin(\varphi + \theta)\cos(\varphi + \theta)\,\delta\varphi, \\ \mathfrak{T}\,2B = -2B(\lambda + r)\sin\varphi\,\delta\varphi, \\ \mathfrak{T}\,2T = -T\lambda\sin\varphi\,\delta\varphi, \\ \mathfrak{T}\,2L = -Ll\sin(\varphi + \theta)\,\delta\varphi, \\ \mathfrak{T}\,2\left(\dfrac{1}{2}L\right) = -Ll\sin(\varphi + \theta)\,\delta\varphi. \\ \text{Enfin,} \\ \mathfrak{T}(M + L) = -2l(M + L)\sin(\varphi + \theta)\,\delta\varphi \\ \qquad\qquad - (M + L)\rho(1 + \tang^2\varphi)\,\delta\varphi. \end{cases}$$

En effet,

$$\mathfrak{T}(M+L) = (M+L)MC;$$

mais

$$MM' = l(\cos\varphi' + \cos\varphi''):$$

d'ailleurs la dernière des équations (2) donne, aux quantités près de l'ordre de ρ^2,

$$\cos\varphi'' = -\cos(\varphi+\theta) + \frac{\rho}{l}\tang(\varphi+\theta). \tag{7}$$

Substituant dans l'expression de MM' les valeurs de $\cos\varphi'$, $\cos\varphi''$, il vient

$$MM' = -2l\cos(\varphi+\theta) + \rho\tang(\varphi+\theta). \tag{8}$$

De là on tire, en négligeant les quantités du deuxième ordre par rapport à ρ et à ε,

$$\delta.MM' = 2l\sin(\varphi+\theta)\,\delta\varphi + \rho(1+\tang^2\varphi)\,\delta\varphi,$$

et comme $\delta.MM'$ est la variation algébrique de MM',

$$MC = -2l\sin(\varphi+\theta)\,\delta\varphi - \rho(1+\tang^2\varphi)\,\delta\varphi.$$

Cette valeur, substituée dans celle de $\mathfrak{T}(M+L)$, donne la dernière des équations (6). Maintenant si l'on égale à zéro la somme algébrique des travaux des forces, on est conduit à l'équation

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &h + \frac{T\lambda^2}{3B(\lambda+r)^2}h + \frac{Ll^2\sin^2(\varphi+\theta)}{3B(\lambda+r)\sin\varphi} - \frac{1}{3}\frac{Ll\rho\cos(\varphi+\theta)}{B(\lambda+r)\sin\varphi} \\ &= \frac{g}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}\frac{T\lambda\sin\varphi + 2l(M+2L)\sin(\varphi+\theta) + (M+L)\rho(1+\tang^2\varphi)}{2B(\lambda+r)\sin\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Remarquons, avant d'aller plus loin, que le quatrième terme de l'équation (9) devient, en négligeant les quantités du second ordre par rapport à ρ et à ε,

$$+\frac{1}{3}\frac{Ll\rho h}{B(\lambda+r)^2\sin\varphi};$$

par suite, l'équation citée se transforme dans la suivante :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &h + \frac{T\lambda^2}{3B(\lambda+r)^2}h + \frac{Ll^2\sin 2(\varphi+\theta)}{3B(\lambda+r)\sin\varphi} + \frac{1}{3}\frac{Ll\rho h}{B(\lambda+r)^2\sin\varphi} \\ &= \frac{g}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}\frac{T\lambda\sin\varphi + 2l(M+2L)\sin(\varphi+\theta) + (M+L)\rho(1+\tang^2\varphi)}{2B(\lambda+r)\sin\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Si dans cette équation on fait $\theta = 180^\circ$, $\rho = 0$, on obtient

$$(11) \qquad h\left[1+\frac{T\lambda^2+2Ll^2}{3B(\lambda+r)^2}\right]=\frac{g}{\omega^2}\left[1+\frac{T\lambda-2(M+2L)l}{2B(\lambda+r)}\right];$$

laquelle serait rigoureusement exacte, si les tiges supérieures étaient le prolongement de celles qui portent les boules, et si le point de rotation sur la douille pouvait être placé sur l'axe du régulateur. Si entre les tiges qui portent les boules, et les autres tiges du système, on établit la relation

$$(12) \qquad T\lambda = 2(M+2L)l,$$

l'équation (11) se simplifiera et deviendra

$$(13) \qquad h\left[1+\frac{T\lambda^2+2Ll^2}{2B(\lambda+r)^2}\right]=\frac{g}{\omega^2}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(14) \qquad K=\frac{T\lambda-2(M+2L)l}{2(\lambda+r)},$$

$$(15) \qquad K'=\frac{T\lambda^2+2Ll^2}{3(\lambda+r)^2},$$

l'équation citée prendra la forme

$$(16) \qquad h\omega^2(B+K')=g(B+K).$$

Mais ici l'on a, comme au n° 50,

$$L=\pi p^2 l D, \quad T=\omega p'^2\lambda D,$$

par suite, les valeurs ci-dessus de K et de K' deviennent, en y faisant $r=0$,

$$(17) \qquad K=\frac{\pi D(p'^2\lambda^2-4p^2l^2)-2Ml}{2\lambda},$$

$$(18) \qquad K'=\frac{\pi D(p'^2\lambda^3+2p^2l^3)}{3\lambda^2},$$

et si $p'=p$,

$$(19) \qquad K=\frac{\pi p^2 D(\lambda^2-4l^2)-2Ml}{2\lambda},$$

$$(20) \qquad K'=\frac{\pi p^2 D(\lambda^3+2l^3)}{3\lambda^2},$$

Si l'on fait servir l'équation (10) à la détermination de la correction δh de h, on trouvera, en faisant $r = 0$,

$$(21)\quad \begin{cases} \delta h = -\dfrac{\varepsilon}{(B+K')\lambda\sin\varphi}\left[\dfrac{2}{3}Ll^2\cos 2\varphi + \dfrac{g}{\omega^2}\dfrac{lh(M+2L)}{\lambda}\right] \\ \quad -\dfrac{\rho}{2(B+K')\lambda\sin\varphi}\left[\dfrac{1}{3}L\dfrac{l}{\lambda}h - 2\dfrac{g}{\omega^2}(M+L)(1+\tan^2\varphi)\right]. \end{cases}$$

On calculera cette formule en y substituant les valeurs de h et de φ qui résultent de la première approximation, et en ayant égard à la valeur ci-dessus de L.

L'équation (16) ayant la même forme que les équations (1) du n° 49 conduira aux mêmes conséquences; seulement les valeurs de K et de K' ne seront pas les mêmes dans les deux cas. Si l'on nomme h_1 la hauteur de la douille, on aura d'abord, en vertu des équations (8) et (3),

$$h_1 = 2l\cos(\varphi+\varepsilon) + \rho\,\text{tang}(\varphi+\varepsilon).$$

Développant et négligeant les termes du deuxième ordre par rapport à ρ et ε, il vient

$$h_1 = 2l\cos\varphi + \rho\,\text{tang}\,\varphi - 2l\varepsilon\sin\varphi.$$

Mais

$$\cos\varphi = \frac{h}{\lambda};$$

donc

$$(22)\qquad h_1 = 2\frac{l}{\lambda}h + \rho\,\text{tang}\,\varphi - 2l\varepsilon\sin\varphi.$$

On aura de même pour les valeurs extrêmes de la hauteur de la douille, et en négligeant les variations de l'angle φ,

$$(23)\qquad h'_1 = 2\frac{l}{\lambda}h' + \rho\,\text{tang}\,\varphi - 2l\varepsilon\sin\varphi,$$

$$(24)\qquad h''_1 = 2\frac{l}{\lambda}h'' + \rho\,\text{tang}\,\varphi - 2l\varepsilon\sin\varphi.$$

On tire des équations (23) et (24),

$$(25)\qquad \gamma = 2\frac{l}{\lambda}c.$$

Après cela, on trouvera comme au n° 50,

$$(26)\quad \begin{cases} h = \dfrac{(n^2-1)^2}{4n^3}c, \\ h' = \dfrac{(n-1)^2}{4n}c, \\ h'' = \dfrac{(n+1)^2}{4n}c. \end{cases}$$

$$(27)\quad \frac{h'_0}{h''_0} < \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,$$

$$(28)\quad \begin{cases} \gamma > \dfrac{8n}{(n-1)^2}\dfrac{l}{\lambda}h'_0, \\ \gamma < \dfrac{8n}{(n+1)^2}\dfrac{l}{\lambda}h''_0, \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} N > \dfrac{60}{\pi}\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\sqrt{\dfrac{ng}{c}\dfrac{B_1+K}{B_1+K'}}, \\ N < \dfrac{60}{\pi}\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\sqrt{\dfrac{ng}{c}\dfrac{B_0+K}{B_0+K'}}, \end{cases}$$

$$(30)\quad B = \frac{Kng - K'c\dfrac{\pi^2N^2}{3600}\left(\dfrac{n^2-1}{n}\right)}{\dfrac{\pi^2N^2}{3600}\left(\dfrac{n^2-1}{n}\right)^2 c - ng}.$$

Pour calculer un pendule conique à tiges prolongées, on commencera par calculer K et K′. Ayant adopté une certaine valeur pour h''_0, la relation (27) dirigera dans le choix de h'_0. Ensuite les équations (28) feront connaître les limites de γ. Ayant adopté pour γ une valeur comprise entre ces limites, on s'en servira pour calculer c au moyen de la formule (25). c étant connu, les inégalités (29) feront connaître les limites de N. Ayant choisi la valeur de N, la relation (30) déterminera B. Au moyen des équations (26) on obtiendra h, h', h''. On corrigera ces valeurs à l'aide de la formule (21), et en adoptant pour h' et h'' les mêmes corrections que pour h. Enfin les formules (22), (23), (24) feront connaître les hauteurs moyenne et extrêmes de la douille.

INSTALLATION D'UN RÉGULATEUR.

52. Le calcul d'un régulateur ayant été fait comme il a été dit précédemment, il ne s'agit plus que de l'installer. Supposons pour fixer les idées que la machine qu'il doit régler soit une machine à vapeur. Sur l'axe du régulateur, on marquera d'une manière quelconque, par exemple au moyen d'une ligne rouge, la position que doit occuper la douille pour la vitesse de régime. Cela fait, ayant l'œil fixé sur l'appareil, on ouvrira ou l'ou fermera à la main le conduit de vapeur, jusqu'à ce que la douille arrive et se maintienne sur le trait rouge. A ce moment, le papillon aura la position qu'il doit avoir pour laisser passer, sous la pression qu'on suppose donnée, la quantité de vapeur nécessaire au mouvement normal de la machine. C'est dans cette position qu'il devra être librement attaché à la douille à l'aide des leviers de manœuvre. Alors si la vitesse de la machine augmente ou diminue, le papillon fermera ou bien ouvrira le conduit de vapeur; et comme d'ailleurs la course de la douille a pu être choisie à volonté, le régulateur, ainsi installé, réglera la force motrice avec toute la précision désirable.

Dans l'exemple numérique traité précédemment, nous avons supposé les tiges cylindriques dans toute leur étendue, ce qui nous a permis de calculer leurs poids. Si elles s'écartaient trop de cette forme, il serait préférable de les peser avec soin pour avoir L et T. Quant aux longueurs l et λ, elles s'obtiendront en les comptant des centres de rotation.

Après cela, on trouvera comme au n°



(26)

(27)

(28)

TREIZIÈME LEÇON.

MACHINES A VAPEUR.

DIVERS GENRES DE MACHINES A VAPEUR.

53. *Les machines à vapeur sont des appareils dans lesquels on utilise la force élastique de la vapeur pour imprimer à un piston un mouvement rectiligne alternatif.* On transforme ensuite ce dernier mouvement en un mouvement circulaire continu au moyen d'une manivelle qui s'articule avec le piston à l'aide d'une bielle.

MACHINES A SIMPLE ET A DOUBLE EFFET.

Quand la vapeur n'agit que sur un côté du piston, les machines sont à simple effet; elles sont *à double effet* quand elle agit alternativement au-dessus et au-dessous du piston.

MACHINES SANS DÉTENTE ET AVEC DÉTENTE.

Lorsque le cylindre à vapeur est en communication avec le générateur pendant toute la course du piston, la vapeur agit *à pleine pression* ou *sans détente*. La vapeur agit *avec détente* lorsque, pendant la course du piston, on intercepte la communication avec la chaudière. Dans ce cas, la vapeur admise dans le cylindre pousse le piston en se détendant comme ferait un ressort. Dans les machines à détente, on nomme *course d'admission de la vapeur l'espace parcouru par le piston, au moment où l'on intercepte la communication avec la chaudière.*

MACHINES A CONDENSATION SANS CONDENSATION.

Après avoir agi pendant une course, la vapeur est chassée du cylindre par le piston quand celui-ci exécute sa course contraire; alors elle se rend, soit dans l'atmosphère, soit dans un

espace fermé où se fait à chaque instant une injection d'eau froide qui condense la vapeur : dans le premier cas, la machine est dite *sans condensation*; dans le second cas, elle est dite *à condensation*.

MACHINES ATMOSPHÉRIQUES.

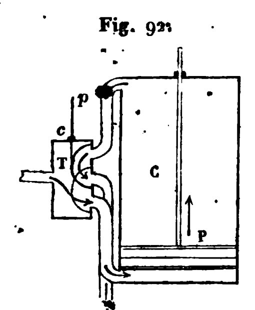
Quand la vapeur agit au-dessous du piston seulement, pour peu que sa force élastique surpasse la pression atmosphérique, elle fera remonter celui-ci ; on facilite ce mouvement au moyen d'un contre-poids attaché au balancier. Le piston étant arrivé au point le plus haut de sa course, on condense la vapeur qui est au-dessous ; alors la pression atmosphérique le fait descendre. Ces sortes de machines s'appellent *machines atmosphériques*.

MACHINES A HAUTE, BASSE ET MOYENNE PRESSION.

On sait que sous la pression barométrique de $0^m,76$, l'atmosphère exerce sur une surface de 1 centimètre carré une pression d'environ 1 kilogramme ($1^k,0335$) ; une telle pression est ce qu'on nomme *une atmosphère*. Cela posé, lorsque dans le générateur la tension de la vapeur ne surpasse pas une atmosphère et un quart, la machine est dite *à basse pression*; elle est *à moyenne pression*, si la tension de la vapeur est comprise entre une atmosphère et un quart et quatre atmosphères ; elle est dite *à haute pression*, quand cette tension surpasse quatre atmosphères.

JEU DE LA VAPEUR DANS LES MACHINES A UN CYLINDRE.

La machine étant en mouvement, un piston P (*fig.* 92), mû par un excentrique monté sur l'arbre de la manivelle, fait mouvoir une pièce T qu'on nomme *tiroir*, de telle sorte que lorsque le piston P est au bas de sa course, le tiroir s'élève en laissant à découvert le conduit par lequel la boîte à vapeur *c* communique avec le cylindre C. Alors le piston poussé de bas en haut remonte et chasse devant lui la vapeur qui est refoulée d'abord sous le tiroir T, d'où elle se

Fig. 92.


d'une manière permanente pendant le mo
chine. A chaque coup de piston, la vapeur e
pace fermé C qu'on nomme *condenseur*, et
instant une injection d'eau froide. P est u
et foulante qui retire l'eau et l'air du conde
pompe à air. La pompe à air amène l'eau
un conduit d'où elle s'échappe en partie
plus loin se meut une pompe aspirante et
plein, qu'on nomme *pompe alimentaire*, p
dans le générateur une partie de l'eau de
une troisième pompe, la *pompe de puits*, q
par la pompe alimentaire, amène à chaqu
doit servir à l'alimentation de la machin
sur un balancier, lequel exécute autour d
vement circulaire alternatif. Ce mouvem
ensuite en un mouvement circulaire co
bielle B et de la manivelle M. Sur l'arbre
monté un excentrique EL qui fait mouvoi
side à la distribution de la vapeur. Les t
diverses pompes sont articulées avec le bal
mouvement. L'extrémité K du balancier
gramme articulé dont la propriété est de fai
droite les pistons qu'il commande. Nous
la théorie de ce parallélogramme qui a été
lèbre Watt.

DIMENSIONS DES CYLINDRES A V

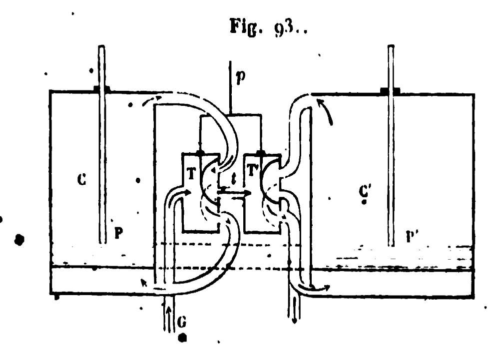
55. Si, pendant une course du piston
contact avec la plus petite surface que c
sous un volume donné, le refroidissement
par cela même le plus petit possible, les
rieures restant les mêmes; par conséquen
serait le plus avantageux parmi tous ceux
Pour remplir la condition qui vient d'être
la longueur de la course du piston soit, à t
du diamètre intérieur du cylindre.

rend dans le condenseur ou dans l'atmosphère. Quand le piston est arrivé au point le plus haut de sa course, le tiroir s'abaisse, et prend la seconde position marquée sur la figure. A ce moment, il met à découvert le tuyau qui fait communiquer la boîte à vapeur avec la partie supérieure du cylindre, et ferme la communication inférieure; alors la vapeur, qui arrive de la chaudière dans la boîte à vapeur, passe de là au-dessus du piston pour le faire descendre. Pendant le mouvement descendant, celui-ci refoule encore la vapeur sous le tiroir, d'où elle se rend soit dans le condenseur, soit dans l'atmosphère. On voit que le tiroir ouvre et ferme alternativement les communications de la boîte à vapeur avec le cylindre, tandis qu'il recouvre constamment le conduit de décharge.

JEU DE LA VAPEUR DANS LES MACHINES DE WOLFF.

Dans les machines de Wolff, deux pistons sont liés avec le même balancier et montent et descendent en même temps, commençant et finissant leur course au même instant. La machine étant en mouvement, un excentrique monté sur l'arbre de la manivelle fait monter et descendre une tige p (*fig.* 93), à laquelle sont reliées deux autres tiges, faisant mouvoir les deux tiroirs T et T' dans deux boîtes à vapeur qui communiquent par un tuyau t. La vapeur arrive d'abord dans le petit cylindre où elle se détend en partie; de là elle se rend dans le grand, où elle continue à se détendre pendant toute la course du piston.

Fig. 93.



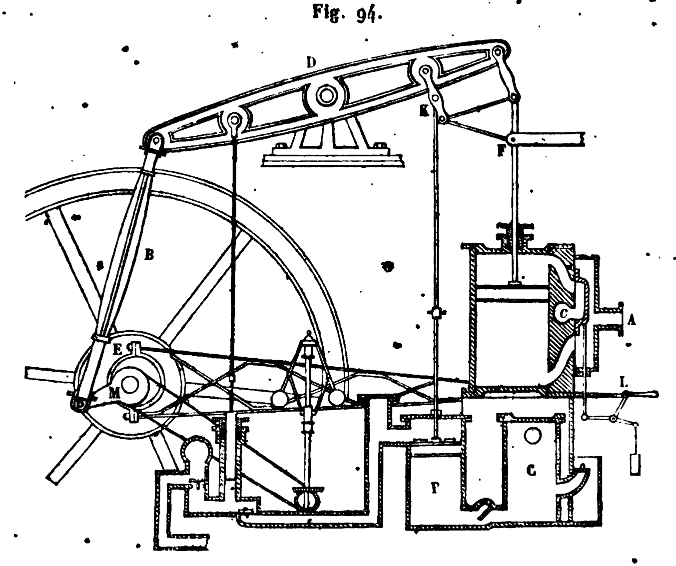
Ainsi la vapeur arrive du générateur par le tuyau G et se rend dans la première boîte à vapeur; de là, et d'après la position actuelle des tiroirs, elle va dans la partie inférieure du cylindre C, et pousse le piston de bas en haut. Le piston P

en remontant refoule la vapeur supérieure qui se rend sous le tiroir de la première boîte; de là elle passe dans la seconde, et de celle-ci dans la partie inférieure du grand cylindre où elle sollicite le piston à monter. Pendant ce mouvement, la vapeur qui se trouve au-dessus du piston, dans le cylindre C', va sous le tiroir de la seconde boîte à vapeur, et de là, par le tuyau de décharge, elle se rend soit dans le condenseur, soit dans l'atmosphère. Quand les deux pistons sont arrivés à la limite de leur course, la tige *p* s'abaisse, et les deux tiroirs prennent la position pointillée marquée sur la figure; alors les mêmes faits se reproduisent, mais en sens inverse.

DESCRIPTION SOMMAIRE D'UNE MACHINE A VAPEUR.

54. Les machines à vapeur affectent des formes très-diverses, mais toutes ont certaines parties essentielles qui leur sont communes et que nous allons indiquer succinctement (*fig.* 94).

Fig. 94.



A est le cylindre où la vapeur afflue tantôt au-dessous du piston, tantôt au-dessus par le jeu du tiroir qui se meut dans la boîte à vapeur, laquelle communique avec le générateur

d'une manière permanente pendant le mouvement de la machine. A chaque coup de piston, la vapeur est refoulée dans l'espace fermé C qu'on nomme *condenseur*, et où se fait à chaque instant une injection d'eau froide. P est une pompe aspirante et foulante qui retire l'eau et l'air du condenseur; on la nomme *pompe à air*. La pompe à air amène l'eau du condenseur dans un conduit d'où elle s'échappe en partie au dehors. Un peu plus loin se meut une pompe aspirante et foulante, à piston plein, qu'on nomme *pompe alimentaire*, parce qu'elle refoule dans le générateur une partie de l'eau de condensation. Enfin une troisième pompe, la *pompe de puits*, qui est censée cachée par la pompe alimentaire, amène à chaque instant l'eau qui doit servir à l'alimentation de la machine. Le piston F agit sur un balancier, lequel exécute autour du point D un mouvement circulaire alternatif. Ce mouvement se transforme ensuite en un mouvement circulaire continu à l'aide de la bielle B et de la manivelle M. Sur l'arbre de la manivelle est monté un excentrique EL qui fait mouvoir le tiroir qui préside à la distribution de la vapeur. Les tiges des pistons des diverses pompes sont articulées avec le balancier qui les met en mouvement. L'extrémité K du balancier porte un parallélogramme articulé dont la propriété est de faire mouvoir en ligne droite les pistons qu'il commande. Nous donnerons plus tard la théorie de ce parallélogramme qui a été imaginé par le célèbre Watt.

DIMENSIONS DES CYLINDRES A VAPEUR.

55. Si, pendant une course du piston, la vapeur était en contact avec la plus petite surface que comporte le cylindre sous un volume donné, le refroidissement de la vapeur y serait, par cela même le plus petit possible, les circonstances extérieures restant les mêmes; par conséquent, un tel cylindre serait le plus avantageux parmi tous ceux de même volume. Pour remplir la condition qui vient d'être énoncée, *il faut que la longueur de la course du piston soit, à très-peu près, double du diamètre intérieur du cylindre.*

*Pour résoudre cette question, nous chercherons d'abord *quelle est la quantité de surface qu'il faudrait mettre en contact avec la vapeur, pendant un temps égal à celui d'une course du piston, pour que le refroidissement fût le même que pendant une course effective.*

Soit θ le temps de la course l; partageons cette longueur en n parties égales infiniment petites, et nommons ε l'une de ces parties; nommant aussi τ le temps infiniment petit, nécessaire pour parcourir ε, on aura à la fois

$$(1) \qquad l = n\varepsilon, \quad \theta = n\tau.$$

Remarquons maintenant que les intervalles de temps pendant lesquels la portion de surface cylindrique répondant à chaque élément ε, sera en contact avec la vapeur, seront donnés par le tableau suivant:

1[er] intervalle..........	ε,	θ,
2[e] intervalle..........	ε,	$\theta - \tau$,
3[e] intervalle..........	ε,	$\theta - 2\tau$,
....		
$n^{\text{ième}}$ intervalle..........	ε,	$\theta - (n-1)\tau$.

On peut poser

$$\theta - \tau = \frac{1}{m}\theta, \quad \theta - 2\tau = \frac{1}{m'}\theta, \ldots,$$

m, m', m'', etc., étant des nombres entiers ou fractionnaires. Or il est évident qu'on peut rendre l'intervalle ε, m fois plus petit, pourvu qu'on rende le temps du contact avec la vapeur m fois plus grand ou égal à θ. De même le 3[e] intervalle ε pourra être rendu m' fois plus petit, pourvu que la durée du contact soit rendue m' fois plus grande, et ainsi de suite. Par conséquent, les éléments cylindriques qui ont pour hauteurs respectives

$$\frac{\varepsilon}{1}, \quad \frac{\varepsilon}{m}, \quad \frac{\varepsilon}{m'}, \quad \frac{\varepsilon}{m''}, \ldots,$$

supposées en contact avec la vapeur pendant tout le temps de la course du piston, refroidiront celle-ci de la même manière que cela a lieu pendant la course effective. Donc la surface cy-

lindrique intérieure qui aura pour hauteur

$$\frac{\varepsilon}{1} + \frac{\varepsilon}{m} + \frac{\varepsilon}{m'} + \frac{\varepsilon}{m''} + \ldots,$$

mise en contact avec la vapeur pendant toute la durée de la course du piston, produira un refroidissement égal au refroidissement effectif. l' étant la somme ci-dessus, on aura, en remplaçant m, m', m'', etc., par leurs valeurs,

$$l' = \frac{\varepsilon}{1} + \varepsilon\frac{\theta - \tau}{\theta} + \varepsilon\frac{\theta - 2\tau}{\theta} + \ldots + \varepsilon\frac{\theta - (n-1)\tau}{\theta};$$

et, en développant,

$$l' = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \ldots - \varepsilon\frac{\tau}{\theta}(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1),$$

ou, ce qui revient au même,

$$l' = n\varepsilon - \varepsilon\frac{\tau}{\theta}\frac{(n-1)n}{2}.$$

Mais

$$n\varepsilon = l, \quad n\tau = \theta, \quad \text{donc} \quad l' = l - \frac{1}{2}l\left(1 - \frac{\tau}{\theta}\right);$$

négligeant le terme infiniment petit $\frac{1}{2}l\frac{\tau}{\theta}$, il vient

(2) $$l' = \frac{1}{2}l.$$

Soient maintenant x le rayon du cylindre, y la course inconnue du piston : la liberté du cylindre étant my, la surface convexe cylindrique de l'espace libre sera en contact avec la vapeur avant que la course commence; par conséquent, la surface qu'il faut rendre minima sera

(3) $$S = 2\pi x^2 + \pi xy(1 + 2m).$$

On aura en même temps pour le volume V du cylindre qui est donné

(4) $$V = \pi x^2(1 + m)y.$$

Éliminant y entre ces deux dernières équations, il vient

(5) $$S = 2\pi x^2 + \frac{1 + 2m}{1 + m}\frac{V}{x}.$$

Prenant la dérivée et l'égalant à zéro, on trouve

$$(6)\qquad x = \sqrt[3]{\frac{1+2m}{1+m}\,\frac{V}{4\pi}}.$$

En prenant la dérivée seconde de S, on s'assurera sans peine que la valeur précédente de x répond à un minimum. Maintenant, si l'on multiplie par x les deux membres de l'équation (4), et qu'on y remplace ensuite x^3 par sa valeur, on trouve

$$(7)\qquad y = \frac{4x}{1+2m}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

DE LA CHARGE MAXIMA.

56. *Pour une course d'admission donnée, il existe une valeur de la charge (résistance sur les pistons) pour laquelle la pression dans le cylindre avant la détente (pression d'admission) est sensiblement égale à la pression dans le générateur.* Pour le faire voir, supposons le régime établi, puis suspendons le mouvement de la machine; et afin que la pression dans le générateur ne change pas, faisons écouler, par un robinet de décharge, une quantité de vapeur égale à celle qui se dépense dans l'état normal; enfin, appliquons sur les pistons une résistance indéfinie. Ayant fermé le robinet de décharge, si l'on rétablit la communication avec le cylindre, la vapeur se précipitera sous le piston; dans ce trajet elle diminuera de pression: mais la vapeur continuant d'affluer, la pression dans le cylindre croîtra graduellement, et deviendra nécessairement égale à la pression dans la chaudière, puisque le piston reste immobile. Concevons maintenant que l'on diminue la charge très-rapidement, mais d'une manière continue; il arrivera nécessairement un moment où le piston sera soulevé. Dans les premiers instants du mouvement la force motrice surpassera un peu la résistance; elle imprimera donc aux pistons une vitesse croissante. Mais bientôt l'accélération du mouvement amenant une diminution de pression, l'effort moteur décroîtra et deviendra moindre que la résistance si la course d'admission est assez grande; alors le mouvement se ralentira, et ce ralentissement continuëra tant que la force motrice restera moindre que la résistance. La pression continuant à

croître, surpassera bientôt la résistance, et à ce moment la vitesse redeviendra croissante, tandis que la force motrice sera décroissante; l'accélération du mouvement se continuera donc jusqu'à ce que la pression redevienne moindre que la résistance, et ainsi de suite. La force motrice oscillant légèrement de chaque côté de la résistance, la pression moyenne dans le cylindre, avant la détente, sera égale à cette résistance et très-peu inférieure à la pression initiale ou à la pression dans le générateur, laquelle restera ainsi constante tant que la production de vapeur dans la chaudière restera égale à la vapeur dépensée; quant à la vitesse de la machine, elle se réglera évidemment sur la quantité de vapeur que la chaudière sera capable de fournir. Il suit de là qu'*il existe une charge des pistons pour laquelle la pression d'admission est sensiblement égale à la pression dans le générateur*. Cette charge est dite la charge du maximum d'effet.

D'après M. de Pambour (*), pendant tout le temps que la vapeur fonctionne dans les cylindres, elle est au maximum de densité qui convient à sa température; et si l'on nomme S un volume d'eau à 100 degrés exprimé en mètres cubes, S′ le volume de vapeur fourni par S, P la pression en kilogrammes qu'elle exerce sur une surface de 1 mètre carré, n et q des coefficients constants, on aura

$$S' = \frac{S}{n + qP}. \tag{1}$$

Quant aux coefficients n et q, ils ont, d'après le même auteur, les valeurs suivantes:

Jusqu'à deux atmosphères, environ

$$\begin{cases} n = 0{,}00004227, \\ q = 0{,}0000000529. \end{cases}$$

Au-dessus de deux atmosphères

$$\begin{cases} n = 0{,}0001421, \\ q = 0{,}000000471. \end{cases}$$

(*) M. de Pambour est le premier qui ait donné une théorie exacte de la machine à vapeur. Cet auteur a publié, en 1835, la théorie des machines locomotives. La théorie de la machine à vapeur a paru en 1839.

Pour calculer la vaporisation d'une machine, on prendra le premier système jusqu'à deux atmosphères; le deuxième, au delà de deux atmosphères.

Pour calculer la force d'une machine, on se servira du premier système ou du deuxième, suivant que la machine sera à condensation ou sans condensation.

MACHINES A UN SEUL CYLINDRE.

FORMULES FONDAMENTALES.

57. Appelons maintenant :

l la course du piston;

l' la course d'admission de la vapeur;

c la liberté du cylindre;

a la section droite du cylindre;

β le volume de la boîte à vapeur en y comprenant la capacité du conduit que le mécanisme de la détente ouvre et ferme alternativement, ce volume étant diminué du volume extérieur du tiroir;

θ la moyenne des volumes des conduits qui font communiquer la boîte à vapeur avec le cylindre;

P la pression dans le cylindre avant la détente;

ϖ la pression derrière le piston;

p' la pression pendant la détente;

π' la pression à la limite d'expansion : toutes ces pressions exprimant des kilogrammes et étant rapportées au mètre carré.

Cela posé, on remarquera qu'après chaque coup de piston il reste (*fig.* 92) :

1°. De la vapeur à la pression ϖ dans l'espace libre ac du cylindre, ainsi que dans les tuyaux θ;

2°. De la vapeur à la pression π' dans la boîte β.

Alors la vapeur admise dans le système distributeur, par l'orifice que le mécanisme de la détente ouvre et ferme alternativement, prendra des volumes qui auront pour valeurs :

A la fin de l'admission

$$(1)\quad S' = a(l'+c) - ac\frac{n+q\varpi}{n+q\text{P}} + \theta - \theta\frac{n+q\varpi}{n+q\text{P}} + \beta - \beta\frac{n+q\pi'}{n+q\text{P}}.$$

S'' étant aussi le volume de vapeur pendant la détente, et quand le piston est à la distance z de l'extrémité du cylindre par où arrive la vapeur, on aura pareillement

$$(2)\quad S'' = az - ac\,\frac{n + q\varpi}{n + qp'} + \theta - \theta\,\frac{n + q\varpi}{n + qp'} + \beta - \beta\,\frac{n + q\pi'}{n + qp'}.$$

Enfin, si l'on désigne par S le volume d'eau capable de produire S' sous la pression d'admission P, on aura, en supposant nulles les condensations pendant la détente,

$$(3)\quad \begin{cases} S' = \dfrac{S}{n + qP}, \\ S'' = \dfrac{S}{n + qp'}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad p' = \frac{S'}{S''}\left(\frac{n}{q} + P\right) - \frac{n}{q}.$$

En substituant dans cette équation les valeurs précédentes de S' et de S'', on trouve

$$(5)\quad p' = \left(\frac{n}{q} + P\right)\frac{al' + ac + \beta + \theta}{az + \beta + \theta} - \frac{n}{q}.$$

Si l'on fait, dans cette équation,

$$z = l + c,$$

il vient, pour la valeur de la pression à la limite d'expansion,

$$(6)\quad \pi' = \left(\frac{n}{q} + P\right)\frac{al' + ac + \beta + \theta}{al + ac + \beta + \theta} - \frac{n}{q}.$$

COURSE D'ADMISSION DU MAXIMUM D'EFFET.

Si dans cette équation on fait $\pi' = \varpi$, on aura, pour déterminer la course d'admission qui fait sortir la vapeur sous la pression ϖ,

$$(7)\quad \frac{al' + ac + \beta + \theta}{al + ac + \beta + \theta} = \frac{n + q\varpi}{n + qP}\ (*).$$

(*) Cette course d'admission diffère très-peu de la course d'admission du maximum d'effet *analytique*.

Nous ferons remarquer, en passant, que l'on ne doit pas faire sortir la vapeur de la machine sous une pression inférieure à celle qui s'exerce derrière le piston; car si pour une machine à condensation, par exemple, on prenait pour ϖ une valeur moindre que la pression ordinaire dans le condenseur $\left(\text{environ } \frac{4}{19} \text{ d'atmosphère}\right)$, la vapeur de celui-ci viendrait, après chaque course, se condenser dans le cylindre. Donc *en faisant sortir la vapeur sous la pression qui s'exerce derrière le piston, on épuisera, à très-peu près, toute la force motrice du fluide élastique. Alors pour la même dépense on aura plus de force, et réciproquement, moins de dépense pour la même quantité de force.*

Il arrive ici, relativement à la pression, ce qui a lieu pour la vitesse dans une roue hydraulique. Il est évident que si l'eau sort sans vitesse des aubes de celle-ci, elle lui aura transmis toute sa force motrice.

Nous appellerons *course d'admission du maximum d'effet, la course d'admission qui fait sortir la vapeur sous une pression égale à celle qui s'exerce derrière le piston.*

TRAVAIL DE LA VAPEUR.

*Remarquons maintenant que le travail de la vapeur, relatif à une course du piston, a pour expression

$$a\mathrm{R}\,l = a\mathrm{P}\,l' + \int_c^{l+c} ap'\,dz - al\left(\frac{n}{q} + \varpi\right).$$

Effectuant les intégrations, on trouve, après tous calculs faits,

$$(8)\quad \begin{cases} a\mathrm{R}\,l = \left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)\left[al' + (al' + ac + \beta + \theta)\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right] \\ \quad - al\left(\frac{n}{q} + \varpi\right). \end{cases}$$

Cette équation fera connaître l'effort moyen $a\mathrm{R}$ transmis au piston ou la charge de la machine.

Soit N le nombre des courses en une minute; le travail (en kilogrammètres) relatif à cet intervalle de temps aura pour va-

leur

$$(9)\quad \begin{cases} T_m = N\left(\dfrac{n}{q}+P\right)\left[al' + (al'+ac+\beta+\theta)\log\dfrac{al+ac+\beta+\theta}{al'+ac+\beta+\theta}\right] \\ \quad - al\,N\left(\dfrac{n}{q}+\varpi\right). \end{cases}$$

En divisant ce résultat par 4500, on aura la force de la machine en chevaux.

VAPORISATION MÉCANIQUE.

Nommant S la vaporisation en une minute, on a d'abord

$$S = N(n+qP)S';$$

remplaçant S′ par sa valeur (1), il vient

$$(10)\quad S = N(n+qP)(al'+ac+\beta+\theta) - N[(ac+\theta)(n+q\varpi)+\beta(n+q\pi')].$$

Si dans cette équation on remplace $(n+q\pi')$ par sa valeur tirée de la relation (6), on trouve

$$(11)\quad S = N(n+qP)(al+ac+\theta)\frac{al'+ac+\beta+\theta}{al+ac+\beta+\theta} - N(ac+\theta)(n+q\varpi).$$

On peut, sans inconvénient, réduire cette formule à son premier terme.

MACHINES LOCOMOTIVES.

Soit V la vitesse de translation par minute; R étant le rayon d'une roue motrice, on aura évidemment

$$V = \pi RN, \quad \text{d'où} \quad N = \frac{V}{\pi R};$$

substituant cette valeur dans l'équation (9), et doublant le résultat à cause des deux cylindres, il vient

$$(12)\quad \begin{cases} T_m = \dfrac{2V}{\pi R}\left(\dfrac{n}{q}+P\right) \\ \quad \times\left[al' + (al'+ac+\beta+\theta)\log\dfrac{al+ac+\beta+\theta}{al'+ac+\beta+\theta}\right] \\ \quad - 2\,al\dfrac{V}{\pi R}\left(\dfrac{n}{q}+\varpi\right). \end{cases}$$

Soit F l'effort de traction de la machine, ou la résistance du train parallèle à la voie, on aura

$$T_m = FV,$$

et par suite

$$(13)\quad \begin{cases} F = \dfrac{2}{\pi R}\left(\dfrac{n}{q} + P\right) \\ \quad \times\left[al' + (al' + ac + \beta + \theta)\log\dfrac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right] \\ \quad - \dfrac{2\,al}{\pi R}\left(\dfrac{n}{q} + \varpi\right). \end{cases}$$

On voit que *pour la même pression d'admission*, *la charge* F *est en raison inverse du rayon des roues motrices.*

Pareillement, si dans la formule (11) on remplace N par sa valeur ci-dessus, et qu'on résolve ensuite l'équation résultante par rapport à V, on trouve

$$(14)\quad V = \frac{1}{2}\pi R \frac{S(al + ac + \beta + \theta)}{(n + qP)(al + ac + \theta)(al' + ac + \beta + \theta) - (ac + \theta)(al + ac + \beta + \theta)(n + q\varpi)}.$$

Cette équation fait voir que *la vitesse est proportionnelle à la vaporisation et à la grandeur du rayon des roues motrices, la pression d'admission restant constante.*

Comme dans les machines locomotives le tiroir ordinairement fait lui-même détente, on devra supposer $\beta = 0$, ce qui fera disparaître de la formule ci-dessus le facteur $al + ac + \theta$. On pourra aussi supprimer sans inconvénient le deuxième terme du dénominateur.

CALCUL D'UNE LOCOMOTIVE.

Si l'on prend, par exemple,

$a = 0^{mq},04$, $l = 0^{m},40$, $c = 0^{m},04$, $p = 4^{atm} = 41340^{kil}$, $\varpi = 1^{atm} = 10335^{kil}$, $R = 1^{m}$, $S = 0^{mc},02$, $n = 0,0001421$, $q = 0,0000000471$,

on trouve, en négligeant θ, et supposant $l' = l$,

$T_m = 61^{ch},64$,
$F = 315^{kil},814$,
$V = 878^{m},423$ ou par heure $13^{lieues},176$.

QUATORZIÈME LEÇON.

MACHINES DE WOLFF.

FORMULES FONDAMENTALES.

58. Nommons maintenant :

l et l_1 les courses des pistons du petit et du grand cylindre;

l' la course d'admission de la vapeur;

c, c_1 les libertés des deux cylindres;

a, a_1 les sections droites des deux cylindres;

β le volume de la boîte à vapeur du petit cylindre, en y comprenant la capacité du conduit que le mécanisme de la détente ouvre et ferme alternativement, ce volume étant diminué du volume extérieur du tiroir;

β_1 le volume de la boîte à vapeur du grand cylindre, en y comprenant la capacité du tuyau de communication des deux boîtes;

θ et θ_1 les moyennes des volumes des conduits qui font communiquer chaque cylindre avec la boîte à vapeur correspondante;

P la pression d'admission;

ϖ la pression derrière le piston;

p' la pression dans le petit cylindre pendant la première détente;

p la pression pendant la détente dans les deux cylindres, ou pendant la deuxième détente;

π' la pression à la limite d'expansion pendant la première détente;

π la pression à la limite d'expansion pendant la deuxième détente : toutes ces pressions exprimant, comme précédemment, des kilogrammes, et étant rapportées au mètre carré.

Cela posé, on remarquera qu'après chaque coup de piston il reste (*fig.* 93) :

1°. De la vapeur à la pression ϖ dans l'espace libre $a_1 c_1$ du grand cylindre, ainsi que dans le tuyau θ_1 ;

2°. De la vapeur à la pression π dans la boîte β_1 ainsi que dans le tuyau θ ;

3°. De la vapeur à la pression π' dans la boîte β.

Alors la vapeur admise dans le système distributeur par l'orifice de la détente prendra des volumes qui auront pour valeurs :

A la fin de l'admission

$$(1)\quad S' = a(l'+c) - ac\frac{n+q\pi}{n+qP} + \theta - \theta\frac{n+q\pi}{n+qP} + \beta - \beta\frac{n+q\pi'}{n+qP}.$$

Pendant la deuxième détente, et quand le piston du petit cylindre est à la distance z de l'extrémité par où arrive la vapeur,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} S'' = {} & a(l+2c-z) + a_1 c_1 + \frac{a_1 l_1}{l}(z-c) - ac\frac{n+q\pi}{n+qp} \\ & - a_1 c_1\frac{n+q\varpi}{n+qp} + \theta - \theta\frac{n+q\pi}{n+qp} + \beta_1 - \beta_1\frac{n+q\pi}{n+qp} \\ & + \theta_1 - \theta_1\frac{n+q\varpi}{n+qp}. \end{aligned}\right.$$

On a également, en supposant nulles les condensations pendant la détente,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} S' &= \frac{S}{n+qP}, \\ S'' &= \frac{S}{n+qp}, \end{aligned}\right.$$

S désignant encore la vaporisation mécanique pendant une course. De là on tire

$$(4)\quad p = \frac{S'}{S''}\left(\frac{n}{q}+P\right) - \frac{n}{q}.$$

Substituant dans cette équation les valeurs précédentes de S' et S'', on trouve

$$(3)\quad p = \frac{\left(\frac{n}{q}+P\right)(al'+ac+\beta+\theta)+(a_1c_1+\theta_1)\left(\frac{n}{q}+\varpi\right)+\beta_1\left(\frac{n}{q}+\pi\right)-\beta\left(\frac{n}{q}+\pi'\right)}{a(l+2c-z)+a_1c_1+\frac{a_1 l_1}{l}(z-c)+\theta+\beta_1+\theta_1} - \frac{n}{q}.$$

En vertu de la formule (6) du numéro précédent, on a pareillement, relativement au petit cylindre,

$$(6)\qquad p' = \left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)\frac{al' + ac + \beta + \theta}{az + \beta + \theta} - \frac{n}{q}.$$

En faisant dans ces deux formules

$$z = l + c,$$

on obtient les pressions aux deux limites d'expansion, savoir :

$$(7)\qquad \pi = \frac{\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)(al' + ac + \beta + \theta) + (a_1 c_1 + \theta_1)\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) - \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right)}{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \theta + \theta_1} - \frac{n}{q},$$

$$(8)\qquad \pi' = \left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)\frac{al' + ac + \beta + \theta}{al + ac + \beta + \theta} - \frac{n}{q}.$$

Si l'on substitue dans la formule (7) la valeur ci-dessus de π', on obtient

$$(9)\qquad \pi = \frac{\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)(al' + ac + \beta + \theta)(al + ac + \theta) + (a_1 c_1 + \theta_1)(al + ac + \beta + \theta)\left(\frac{n}{q} + \varpi\right)}{(a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \theta + \theta_1)(al + ac + \beta + \theta)} - \frac{n}{q}.$$

COURSE D'ADMISSION DU MAXIMUM D'EFFET.

Si dans cette dernière équation on suppose $\pi = \varpi$, on aura, pour déterminer la course d'admission du maximum d'effet,

$$(10)\qquad \frac{al' + ac + \beta + \theta}{al + ac + \beta + \theta} = \frac{n + q\varpi}{n + q\mathrm{P}}\;\frac{a_1 l_1 + ac + \theta}{al + ac + \theta}.$$

TRAVAIL DE LA VAPEUR.

Soient maintenant $\mathfrak{T}_m$ et $\mathfrak{T}'_r$ les travaux moteur et résistant dans le petit cylindre, et de même $\mathfrak{T}''_m$ le travail moteur dans le grand cylindre ; le travail résistant dans ce dernier cylindre étant $\varpi a_1 l_1$, si l'on nommé R la résistance moyenne totale sur les pistons, et h le chemin décrit par son point d'application, on aura, relativement à une course,

$$(11)\qquad \mathrm{R}h = \mathfrak{T}_m + \mathfrak{T}''_m - \mathfrak{T}'_r - \varpi a_1 l_1.$$

D'abord, si l'on supprime dans la formule (8) du numéro pré-

cédent, le terme ϖal, on trouve

$$(12)\quad \mathfrak{T}_m = \left(\frac{n}{q} + \text{P}\right)\left[al' + (al' + ac + \beta + \theta)\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right].$$

On a ensuite, pour déterminer $\mathfrak{T}'_r$,

$$\mathfrak{T}'_r = \int_c^{l+c} apdz.$$

Effectuant les intégrations, et posant, pour abréger,

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = \left(\frac{n}{q} + \text{P}\right)(\beta + \theta) + \beta_1\left(\frac{n}{p} + \pi\right) + \theta_1\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) - \beta\left(\frac{n}{q} + \pi\right. \\ \mu = \theta + \beta_1 + \theta_1, \end{array}\right.$$

il vient

$$(14)\quad \mathfrak{T}'_r = al\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a(l'+c)\left(\frac{n}{q} + \text{P}\right) + a_1 c_1\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) + \lambda}{a_1 l_1 - al} \\ \times \log\dfrac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} - \dfrac{n}{q} al. \end{array}\right.$$

La quantité $\mathfrak{T}''_m$ se déduit sans peine de $\mathfrak{T}'_r$. En effet,

$$\mathfrak{T}''_m = \int a_1 pdz_1;$$

mais

$$\frac{z_1 - c_1}{z - c} = \frac{l_1}{l}, \quad \text{d'où} \quad dz_1 = \frac{l_1}{l} dz;$$

par suite

$$(15)\quad \mathfrak{T}''_m = \frac{a_1 l_1}{al}\int_c^{l+c} apdz = \frac{a_1 l_1}{al}\mathfrak{T}'_r.$$

Substituant ces diverses valeurs dans (11), il vient

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{R}h = \left(\frac{n}{q} + \text{P}\right)\left[\begin{array}{l} al' + (al' + ac + \beta + \theta)\log\dfrac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta} \\ + \log\dfrac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} \end{array}\right] \\ \quad - \left(\frac{n}{q} + \varpi\right)\left(a_1 l_1 - a_1 c_1 \log\dfrac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu}\right) \\ \quad + \lambda \log\dfrac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu}. \end{array}\right.$$

Par conséquent, si l'on désigne par N le nombre des courses

en une minute, le travail, en kilogrammètres, relatif à cet intervalle de temps, aura pour valeur

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} T_m = N\left(\frac{n}{q}+P\right)&\left[\begin{aligned} al' + (al'+ac+\beta+\theta)\log\frac{al+ac+\beta+\theta}{al'+ac+\beta+\theta} \\ + \log\frac{a_1l_1+a_1c_1+ac+\mu}{al+a_1c_1+ac+\mu}\end{aligned}\right] \\ -N\left(\frac{n}{q}+\varpi\right)&\left(a_1l_1 - a_1c_1\log\frac{a_1l_1+a_1c_1+ac+\mu}{al+a_1c_1+ac+\mu}\right) \\ +N\lambda\log&\frac{a_1l_1+a_1c_1+ac+\mu}{al+a_1c_1+ac+\mu}.\end{aligned}\right.$$

VAPORISATION MÉCANIQUE.

Nommant S la vaporisation en une minute, on a d'abord

$$S = N(n+qP)S';$$

remplaçant S' par sa valeur (1), il vient

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} S &= N(n+qP)(al'+ac+\beta+\theta) \\ &\quad - N[(ac+\theta)(n+q\pi)+\beta(n+q\pi')];\end{aligned}\right.$$

remplaçant également $n+q\pi$, $n+q\pi'$ par leurs valeurs tirées des équations (8) et (9), on obtient enfin

$$(19)\ S = N\frac{(n+qP)(al'+ac+\beta+\theta)(al+ac+\theta)(a_1l_1+a_1c_1+\theta_1)-(ac+\theta)(a_1c_1+\theta_1)(al+ac+\beta+\theta)(n+q\varpi}{(a_1l_1+a_1c_1+ac+\theta+\theta_1)(al+ac+\beta+\theta)}$$

laquelle peut être réduite, sans inconvénient, à son premier terme.

CALCUL DE LA CHARGE DES PISTONS.

Soient R' et R_1 les charges des pistons du petit et du grand cylindre rapportées au mètre carré. En retranchant successivement l'équation (14) de l'équation (12), puis la quantité $\varpi a_1 l_1$ de l'équation (15), on est conduit aux deux relations

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} aR' &= \frac{1}{l}\left(\frac{n}{q}+P\right)\left[al'+(al'+ac+\beta+\theta)\log\frac{al+ac+\beta+\theta}{al'+ac+\beta+\theta}\right] \\ &\quad - a\left\{\begin{aligned} &\frac{a(l'+c)\left(\frac{n}{q}+P\right)+a_1c_1\left(\frac{n}{q}+\varpi\right)+\lambda}{a_1l_1-al} \\ &\times\log\frac{a_1l_1+a_1c_1+ac+\mu}{al+a_1c_1+ac+\mu},\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

$$(21) \left\{ \begin{aligned} a_1 R_1 = a_1 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{a(l'+c)\left(\frac{n}{q}+P\right)+a_1 c_1\left(\frac{n}{q}+\varpi\right)+\lambda}{a_1 l_1 - al} \\ & \times \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} \end{aligned} \right\} \\ & - a_1\left(\frac{n}{q}+\varpi\right). \end{aligned} \right.$$

On aura ensuite

$$(22) \qquad R = aR' + a_1 R_1.$$

Le point d'application de la charge totale R, sur l'horizontale menée par le centre du balancier, s'obtiendra sans difficulté. Enfin, la relation

$$(23) \qquad Rh = aR'l + a_1 R_1 l_1$$

fera connaître h.

INFLUENCE DE LA TIGE DES PISTONS.

Il est encore un élément dont nous n'avons pas tenu compte dans nos formules, je veux parler de l'influence due au volume variable que la tige de chaque piston occupe dans le cylindre où il se meut. Il est évident, en effet, que les deux coups de piston dus à la vapeur arrivant du côté de la tige, ou du côté opposé, ne sont pas identiques. Pour avoir égard à ce nouvel élément perturbateur, il suffira de remplacer partout

$$a \quad \text{par} \quad a - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$a_1 \quad \text{par} \quad a_1 - \frac{1}{2}\alpha_1,$$

α et α_1 étant les sections droites des tiges des pistons du petit et du grand cylindre.

On se rendra compte facilement de cette règle en prenant la moyenne de chacune des valeurs de S' et de S'' pour deux courses consécutives.

EXEMPLE DE CALCUL D'UNE MACHINE ÉTABLIE (*).

Données.

$l = 1^{m}$, $\beta_1 = 0^{mq},04512$,
$l_1 = 1^{m}$, $\theta = 0^{mc},004532$,
$l' = 0^{m},66$, $\theta_1 = 0^{mc},004532$,
$r = 0^{m},20$, d'où $a = 0^{mq},125664$, $N = 52$,
$r_1 = 0^{m},40$, d'où $a_1 = 0^{mq},502654$, $P = 4^{atm},25 = 43924^{kil}$,
$c = 0^{m},02$, $\varpi = \frac{4}{19}\text{atm} = 2176^{kil}$.
$c_1 = 0^{m},02$,
$\beta = 0$ (le tiroir fait lui-même détente),

Au moyen de ces données, les formules (19) et (17) donnent

$$S = 0^{mc},0108595,$$
$$T_m = 448129^{km} \quad \text{ou} \quad 99^{ch},584.$$

On a donc, en résumé :

Dépense d'eau par heure.............. $= 651^{lit},57$,

Charbon par heure $\left(\frac{1}{6}\right)$ environ........ $= 108^{kil},6$,

Force totale de la machine............ $= 99^{ch},584$.

La vaporisation a été calculée en prenant

$$\left\{\begin{array}{l} n = 0,0001421 \\ q = 0,0000000471 \end{array}\right\} \frac{n}{q} = 3017;$$

La force, au moyen des valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} n = 0,00004227 \\ q = 0,0000000529 \end{array}\right\} \frac{n}{q} = 799.$$

(*) Cette machine fonctionne à Roubaix, chez MM. M... et Ce.

QUINZIÈME LEÇON.

DE LA DÉTENTE DU MAXIMUM D'EFFET.

CALCUL DE LA VAPORISATION.

59. La formule (7) du n° 57 et la formule (10) du n° 58 font connaître les courses d'admissions qui dans une machine à un seul cylindre, et dans une machine de Wolf, font sortir la vapeur sous la pression de condensation, ou sous la pression atmosphérique quand la machine ne condense pas, et cela quelle que soit la pression pendant l'admission de la vapeur dans le cylindre. Cette course d'admission, ainsi que nous l'avons expliqué précédemment, est à très-peu près la course d'admission du maximum d'effet.

Lorsque l'admission de vapeur est telle qu'il vient d'être dit, *la vaporisation mécanique d'une machine à un seul cylindre est la même que si, dépourvue d'espaces libres, elle travaillait à pleine vapeur sous la pression qui s'exerce derrière le piston. Le même énoncé convient aux machines de Wolf, supposées réduites à leur grand cylindre.* Pour démontrer cette proposition, considérons une machine à condensation. Le piston étant arrivé à la limite de sa course, la vapeur a, par hypothèse, la même élasticité que la vapeur du condenseur; par conséquent, elle ne pourra d'elle-même se précipiter dans celui-ci, puisque la pression y est la même que dans le cylindre. Elle sera donc refoulée uniquement par le mouvement du piston, lequel ne pourra chasser qu'un volume de vapeur égal au volume qu'il engendre. C. Q. F. D.

Il suit de cet énoncé que la vaporisation par minute sera donnée par la formule

(1) $$S = N\,al\,(n + q\varpi).$$

Cette relation convient également aux machines de Wolf, en y changeant a et l en a_1 et l_1.

La formule ci-dessus est aussi une conséquence des formules génerales sur la machine à vapeur.

Le plus ordinairement, l'indicateur du vide marque 60 centimètres, ce qui répond à une pression, dans le condenseur, de $\frac{4}{19}$ d'atmosphère; on aura donc $\varpi = 2176^{kil}$; prenant en même temps

$$n = 0,00004227, \quad q = 0,0000000529,$$

la formule (1) devient simplement

$$(2) \qquad S = (0^{mc},0001574)\, alN.$$

Si la machine ne condense pas, $\varpi = 10335^{kil}$, et la même formule (1) donne

$$(3) \qquad S = (0^{mc},000589)\, alN.$$

Si dans les formules (2) et (3) on fait

$$al = 1^{mc}, \quad N = 1,$$

on trouve :

Pour les machines à condensation,

$$(4) \qquad S = 0^{mc},0001574;$$

Pour les machines sans condensation,

$$(5) \qquad S = 0^{mc},000589.$$

Nous ferons remarquer que le résultat ci-dessus, relatif aux machines à condensation, est un peu trop fort. En effet, depuis $0^{atm},1$ jusqu'à $0^{atm},5$ il serait plus exact de prendre pour n et q

$$n = 0,00009878, \quad q = 0,0000000584.$$

A l'aide de ces valeurs, on trouve, pour les machines à condensation,

$$S = 0^{mc},0001369 \quad \text{ou} \quad 13 \text{ p. } 100 \text{ de moins.}$$

Il résulte de ce qui précède, que *sous la détente du maximum d'effet répondant à une pression d'admission quel-*

conque, une machine à vapeur aussi quelconque dépensera, par course de piston, et par mètre cube de volume engendré en une course, environ 157 millilitres et demi d'eau si elle est à condensation. La dépense sera d'environ 589 millilitres (un peu moins du quadruple), si la machine ne condense pas. Mais il doit être entendu que *le volume engendré* doit se mesurer dans le cylindre où se fait l'expansion définitive de la vapeur.

Quant à la force qu'on obtiendra pour une vitesse et par conséquent pour une dépense donnée, elle croîtra avec la pression d'admission, ainsi qu'on le verra ci-après.

LIMITES DE LA PRESSION DANS LES MACHINES A UN SEUL CYLINDRE.

Proposons-nous d'abord de rechercher ce que devient T_m quand on fait varier P, la vitesse de la machine et la pression ϖ restant les mêmes.

Si l'on résout l'équation (7) du n° 57 par rapport à $\frac{n}{q} + P$, on trouve d'abord

$$\frac{n}{q} + P = \left(\frac{n}{q} + \varpi\right) \frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta};$$

à l'aide de cette valeur, la valeur (9) de T_m du même numéro devient

$$(6)\left\{\begin{aligned} T_m = {} & N\left(\frac{n}{q} + \varpi\right)(al + ac + \beta + \theta) \\ & \times\left(\frac{al'}{al' + ac + \beta + \theta} + \log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right) - Nal\left(\frac{n}{q} + \varpi\right). \end{aligned}\right.$$

Or il est évident que T_m sera un maximum lorsque la quantité

$$y = \frac{al'}{al' + ac + \beta + \theta} + \log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}$$

sera elle-même un maximum, ce qui arrive pour $l' = 0$. La limite de $\frac{n}{q} + P$ devient ainsi

$$(7) \qquad \frac{n}{q} + P = \left(\frac{n}{q} + \varpi\right) \frac{al + ac + \beta + \theta}{ac + \beta + \theta}.$$

Si dans cette équation on néglige $\beta+\theta$ en supposant que cette somme soit très-petite par rapport à l'espace libre *ac* du cylindre, on aura, à très-peu près,

$$(8) \qquad P = \varpi + \left(\frac{n}{q} + \varpi\right)\frac{l}{c}.$$

Ordinairement les constructeurs donnent à $\frac{l}{c}$ des valeurs comprises entre 15 et 20; d'un autre côté, la pression dans le condenseur étant, le plus souvent, de $\frac{4}{19}$ d'atmosphère, on peut supposer $\varpi = 2176^{\text{kil}}$; prenant en même temps $\frac{n}{q} = 799$, on trouve

$$(9) \qquad P = 61676^{\text{kil}} = 6^{\text{atm}} \text{ environ.}$$

Par conséquent, *les machines à un seul cylindre et à condensation, timbrées à six atmosphères* (*) *au plus, et marchant à la détente du maximum d'effet, pourront généralement développer tout le travail que leur vaporisation constante est capable de produire. En général les machines sans condensation ne pourront utiliser tout le travail relatif à leur vaporisation*, puisqu'il faudrait pour cela pouvoir porter la pression de beaucoup au delà du timbre de la chaudière; c'est ainsi que pour des valeurs très-petites de $\frac{\beta+\theta}{ac}$, la pression limite peut dépasser vingt-deux atmosphères.

LIMITES DE LA PRESSION DANS LES MACHINES DE WOLF.

A l'égard des machines du système de Wolf, on tire d'abord de la formule (10) du n° 58,

$$(10) \qquad \frac{n}{q} + P = \left(\frac{n}{q} + \varpi\right)\frac{a_1 l_1 + ac + \theta}{al + ac + \theta}\,\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}.$$

(*) A la rigueur, cette limite doit être portée à *huit* atmosphères, car, en passant aux nombres, il serait plus exact de prendre pour n et q dans l'équation fondamentale (7) du n° 57,

Au numérateur...... $n = 0,00009878$, $q = 0,0000000584$;
Au dénominateur.... $n = 0,0001421$, $q = 0,0000000471$;

ce qui revient à faire usage uniquement du dernier système, en divisant $n + qP$, ou $\frac{n}{q} + P$, par 0,8 environ.

Substituant cette valeur de la formule (17) du numéro cité, puis exprimant la condition que T_m soit un maximum, on trouve

$$(11)\qquad l' = \frac{\beta + \theta}{a} \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu}.$$

Comme cette valeur de l' est très-petite, si l'on fait dans l'équation (10) $l' = 0$, on aura, à très-peu près,

$$\frac{n}{q} + P = \left(\frac{n}{q} + \varpi\right) \frac{a_1 l_1 + ac + \theta}{al + ac + \theta} \, \frac{al + ac + \beta + \theta}{ac + \beta + \theta};$$

et plus simplement, mais avec une approximation moindre,

$$(12)\qquad P = \left(\frac{n}{q} + \varpi\right) \frac{a_1 l_1}{al} \left(\frac{l}{c} + 1\right) - \frac{n}{q}.$$

Ordinairement $\frac{a_1 l_1}{al}$ est compris entre 4 et 5; prenant

$$\frac{a_1 l_1}{al} = 4,$$

et, comme précédemment,

$$\frac{l}{c} = 20, \quad \frac{n}{q} = 799, \quad \varpi = 2176^{\text{kil}},$$

on trouve

$$(13)\qquad P = 249101^{\text{kil}}, \quad \text{ou} \quad 24^{\text{atm}} \text{ environ.}$$

Si la machine ne condensait pas, la limite de P serait évidemment plus grande. De là il résulte qu'*une machine de Wolf, marchant à la détente du maximum d'effet, ne pourra jamais développer tout le travail que sa vaporisation constante est capable de produire.*

Mais, *dans deux machines de même système, l'une à condensation, l'autre sans condensation; et travaillant à la détente du maximum d'effet, une même quantité d'eau vaporisée produira le même travail aux limites de la pression, si les volumes engendrés par les pistons sont respectivement égaux, ainsi que les espaces libres homologues* (*). Considérons, pour fixer les idées, deux machines à un seul cylindre.

(*) Relativement à la dernière partie de l'énoncé, il suffit que la somme des espaces libres soit la même dans les deux machines, quand celles-ci sont à un seul cylindre.

Nous ferons d'abord remarquer que la valeur (6) de T_m peut s'écrire sous la forme

$$T_m = N\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) M.$$

Relativement à la machine sans condensation, on aura pareillement

$$T'_m = N'\left(\frac{n}{q} + \varpi'\right) M'.$$

Divisant ces deux égalités membre à membre, et observant qu'aux limites de la pression $M = M'$, il vient

$$\frac{T_m}{T'_m} = \frac{N}{N'}\,\frac{n + q\varpi}{n + q\varpi'}.$$

Soit S la vaporisation commune. D'après le théorème démontré au commencement de ce numéro,

$$S = al\,N\,(n + q\varpi),$$
$$S = ALN'\,(n + q\varpi');$$

de là on tire

(14) $$\frac{N}{N'}\,\frac{n + q\varpi}{n + q\varpi'} = 1,$$

puisque par hypothèse les volumes al, AL engendrés par les pistons sont égaux. Par suite

$$T_m = T'_m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration serait la même pour deux machines du système de Wolf.

On voit par ce qui précède, que *la machine sans condensation n'est désavantageuse que parce que la pression ne peut y être portée jusqu'à ses dernières limites.*

Si l'on veut que dans les deux machines, et pour des pressions moindres que les pressions limites, la même quantité d'eau vaporisée produise le même travail, il suffira d'exprimer que *les volumes d'admission al'*, AL' sont égaux, ce qui exige que l'on ait

(15) $$\frac{n + q\varpi}{n + qP} = \frac{n + q\varpi'}{n + qP'},$$

les lettres accentuées se rapportant, comme précédemment, à

la machine sans condensation. De là on tire

$$P = \frac{n + q\varpi}{n + q\varpi'}\left(\frac{n}{q} + P'\right) - \frac{n}{q}. \qquad (16)$$

En même temps, l'équation (14) donne, pour le rapport d
vitesses,

$$\frac{N}{N'} = \frac{n + q\varpi'}{n + q\varpi}. \qquad (17)$$

Si l'on prend

$$\varpi = 2176^{kil}, \quad \varpi' = 10335^{kil}, \quad \frac{n}{q} = 799,$$

ces deux relations deviennent, en négligeant le deuxième terr
de la valeur de P,

$$P = (0,2672)\,P', \qquad (18)$$

$$\frac{N}{N'} = 3,74. \qquad (19)$$

Ce qui fait voir que les *deux machines ne pourront produi
le même travail, avec la même dépense, qu'entre des limi
très-étroites*. C'est ainsi, par exemple, que depuis $3^{atm},7$ ju
qu'à 10 atmosphères, la machine sans condensation pour
marcher à la même force, pour la même vaporisation, que l
machine à condensation travaillant depuis 1 atmosphère ju
qu'à $2^{atm},6$.

*Dans deux machines de même système, toutes deux à co
densation, ou toutes deux sans condensation, et travailla
à la détente du maximum d'effet, une même quantité d'e
vaporisée produira le même travail, si dans les deux m
chines la pression d'admission est la même, et si les capaci
homologues du système distributeur sont, respectivemen
dans le même rapport avec les volumes engendrés par de
pistons de même nom.*

Considérons, pour fixer les idées, deux machines à un se
cylindre. Je suppose que le rapport

$$\frac{ac + \beta + \theta}{al}$$

soit le même dans les deux machines. Je suppose aussi que la vaporisation constante soit égale de part et d'autre, et je dis qu'il en sera de même du travail.

En effet, de l'équation

$$S = alN(n + q\varpi) = aV(n + q\varpi),$$

on tire

$$aV = \text{constante}.$$

La formule (7) du n° 57 donne pareillement

$$\frac{al'}{al} = \text{constante},$$

pourvu que P soit le même de part et d'autre; donc aussi

$$T_m = \text{constante},$$

car la valeur de T_m peut s'écrire sous la forme

$$T_m = aV\left(\frac{n}{q} + \varpi\right)\left(1 + \frac{ac + \beta + \theta}{al}\right) \times \left(\frac{\frac{al'}{al}}{\frac{al'}{al} + \frac{ac + \beta + \theta}{al}} + \log\frac{1 + \frac{ac + \beta + \theta}{al}}{\frac{al'}{al} + \frac{ac + \beta + \theta}{al}}\right) - aV\left(\frac{n}{q} + \varpi\right).$$

La démonstration serait la même pour deux machines du système de Wolf.

On peut remarquer que le théorème précédent aura encore lieu, quelle que soit la détente, pourvu que le rapport $\frac{al'}{al}$ soit le même dans les deux machines. Seulement, la vaporisation commune variera avec la pression et dans le même sens.

Il résulte de ce qui précède, que *dans deux machines de même système, l'une à condensation, l'autre sans condensation, travaillant à la détente du maximum d'effet*, et *dont les capacités homologues du système distributeur sont dans les rapports indiqués ci-dessus, une même quantité d'eau vaporisée produira le même travail aux limites de la pression. Ce travail pourra être aussi rendu égal, pour de certaines*

pressions moindres que les pressions limites. Il doit être entendu que les logarithmes qui entrent dans les formules de la machine à vapeur sont des logarithmes népériens. Dans la pratique, on les supposera des logarithmes vulgaires, après avoir multiplié préalablement chacun d'eux par le nombre

$$K = 2,302585.$$

D'UNE AMÉLIORATION DANS LE RÉGIME ÉCONOMIQUE DES MACHINES A VAPEUR.

La plupart des constructeurs se bornent à copier des machines déjà construites. Nous allons montrer, par un exemple, ce qu'on peut faire dans cette voie. Dans ce but, je me proposerai le problème suivant :

Une machine à vapeur étant donnée, en construire une autre marchant à la même vitesse, et faisant le même travail avec moins de dépense.

Je prendrai pour exemple la machine à vapeur de M. C., filateur à la Louvière-lez-Lille.

DIMENSIONS DES PRINCIPAUX ORGANES DE LA MACHINE.

Rayon du petit cylindre............	$r = 0^{m},17$,
Rayon du grand cylindre...........	$r_1 = 0^{m},276$,
Section droite du petit cylindre......	$a = 0^{mq},0908$,
Section droite du grand cylindre.....	$a_1 = 0^{mq},2393$,
Course du piston du petit cylindre....	$l = 1^{m},06$,
Course du piston du grand cylindre...	$l_1 = 1^{m},521$,
Course d'admission de la vapeur.....	$l' = l$,
Liberté du petit cylindre...........	$c = 0^{m},08$,
Liberté du grand cylindre..........	$c_1 = 0^{m},08$,
Pression d'admission..............	$P = 3\frac{1}{2}\,\text{atm} = 36172^{kil}$,
Pression dans le condenseur.	$\varpi = \frac{4}{19}\,\text{atm} = 2176^{kil}$,
Nombre des courses par minute.....	$N = 52$.

Si l'on néglige les volumes des boîtes à vapeur et conduits aboutissants, les formules (10), (17), (19) du numéro précédent, deviennent respectivement

$$(20)\qquad l' = \frac{a_1 l_1}{al}\,\frac{n+q\varpi}{n+qP}\,l - c\left(1 - \frac{n+q\varpi}{n+qP}\right),$$

$$(21)\quad \begin{cases} T_m = N\left(\dfrac{n}{q}+P\right)\left[al' + a(l'+c)\log\dfrac{l+c}{l'+c} + \log\dfrac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac}{al + a_1 c_1 + ac}\right] \\ \quad - N\left(\dfrac{n}{q}+\varpi\right)\left(a_1 l_1 - a_1 c_1 \log\dfrac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac}{al + a_1 c_1 + ac}\right), \end{cases}$$

$$(22)\qquad S = N\frac{(n+qP)\,a\,(l'+c)\,a_1(l_1+c_1) - aa_1 cc_1(n+q\varpi)}{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac}.$$

Si dans les deux dernières formules, on substitue les données précédentes, et qu'on se rappelle qu'ici $l' = l$, on trouve les résultats suivants :

Force totale de la machine............. $= 80^{ch},565$,
Vaporisation par heure............... $= 619^{lit},8$.

En supposant que 1 kilogramme de charbon produise 6 kilogrammes de vapeur, on a

Consommation de combustible par heure.. $= 103^{kil}$.

La machine ci-dessus brûle en 12 heures 15 hectolitres de charbon. Or 1 hectolitre de charbon, tel qu'on l'emploie à Lille, pèse environ 89 kilogrammes; par conséquent la machine de M. C. brûle par heure environ 111 kilogrammes. On peut remarquer que ce résultat s'écarte peu de celui fourni par le calcul.

Adoptons maintenant pour la nouvelle machine :

Les mêmes courses des pistons;

Les mêmes libertés des cylindres;

Le même rapport entre les sections des cylindres, et supposons de plus que la pression d'admission soit de 5 atmosphères.

Si l'on réduit la formule (20) à son premier terme, on trouve d'abord

$$l' = 0^{m},2273.$$

On a ensuite, pour déterminer a et a_1 : 1°. L'équation

$$\frac{a}{a_1} = \varepsilon = 0,3794; \quad (23)$$

2°. L'équation (21), qu'on peut écrire sous la forme

$$Ma - M'a_1 = T_m. \quad (24)$$

De là on tire

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\varepsilon T_m}{M\varepsilon - M'}, \\ a_1 &= \frac{T_m}{M\varepsilon - M'}. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Mais ici

$$\varepsilon = 0,3794,$$
$$T_m = 362543^{km},$$
$$M = 2690540,$$
$$M' = 220957;$$

partant

$$a = 0^{mq},1720, \quad \text{d'où} \quad r = 0^{m},234,$$
$$a_1 = 0^{mq},4533, \quad \text{d'où} \quad r_1 = 0^{m},380.$$

On obtient ensuite par la formule (22)

Vaporisation par heure...... $448^{kil},83$,
Économie d'eau par heure.... 171^{kil}, environ 27 pour 100.

On calculerait de la même manière les dimensions des cylindres d'une machine, marchant à la même vitesse que la machine ci-dessus, et qui, pour la même dépense, ferait beaucoup plus de force.

SEIZIÈME LEÇON.

THÉORIE DE LA MACHINE A VAPEUR, EN TENANT COMPTE DES CONDENSATIONS QUI SE FONT PENDANT LA DÉTENTE.

60. J'ai exposé, dans ce qui précède, la théorie de la machine à vapeur en tenant compte de tous les espaces libres du système distributeur. Mais cette théorie suppose que la vapeur n'éprouve pas de condensations pendant qu'elle se détend dans la machine; or cette hypothèse, qui paraît sensiblement exacte pour les machines munies de l'enveloppe de Watt, cesse de l'être quand elles en sont dépourvues. Rechercher l'influence de ce nouvel élément perturbateur, tel est le but que je me suis proposé dans cette leçon.

MACHINES A SEUL CYLINDRE.

S′ étant toujours le volume de vapeur à la fin de l'admission, et sous la pression P, on aura

$$(1)\quad S' = a(l'+c) - ac\frac{n+q\varpi}{n+q\text{P}} + \theta - \theta\frac{n+q\varpi}{n+q\text{P}} + \beta - \beta\frac{n+q\pi'}{n+q\text{P}}.$$

S″ étant aussi le volume de vapeur pendant la détente, et quand le piston est à la distance z de l'extrémité du cylindre par où arrive la vapeur, on aura pareillement

$$(2)\quad S'' = az - ac\frac{n+q\varpi}{n+qp'} + \theta - \theta\frac{n+q\varpi}{n+qp'} + \beta - \beta\frac{n+q\pi'}{n+qp'}.$$

Enfin, si l'on désigne par S le volume d'eau capable de produire S′ sous la pression d'admission P, et par ε un coefficient fonction de z dépendant de l'état thermal du cylindre,

on aura les deux nouvelles relations

$$S' = \frac{S}{n + qP}, \tag{3}$$

$$S'' = \frac{\varepsilon S}{n + qp'}. \tag{4}$$

Comme la loi de la condensation de la vapeur pendant la détente est inconnue, il nous reste à faire une hypothèse qui ne puisse s'écarter beaucoup de la vérité, et *il nous a paru qu'on pouvait admettre l'uniformité de la condensation pendant la détente*. D'après cela, si l'on nomme s le volume d'eau qui résulte de la vapeur condensée en une course, ce volume deviendra

$$s\,\frac{z - (l' + c)}{l - l'},$$

lorsque le piston sera, dans le cylindre, à la hauteur z. Mais la quantité de vapeur condensée est aussi équivalente à

$$S(1 - \varepsilon);$$

égalant ces deux valeurs, et résolvant l'équation résultante par rapport à ε, il vient en posant, pour abréger, $m = \frac{s}{S(l - l')}$,

$$\varepsilon = 1 + \frac{s}{S}\,\frac{l' + c}{l - l'} - mz. \tag{5}$$

On tire des deux équations (3) et (4),

$$p' = \frac{S'}{S''}\,\varepsilon\left(\frac{n}{q} + P\right) - \frac{n}{q}. \tag{6}$$

Substituant dans cette relation les valeurs (1) et (2) de S' et de S'', on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} p' = {} & \varepsilon\left(\frac{n}{q} + P\right)\frac{al' + ac + \beta + \theta}{az + \beta + \theta} \\ & + (1 - \varepsilon)\,\frac{(ac + \theta)\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) + \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right)}{az + \beta + \theta} - \frac{n}{q}; \end{aligned}\right.$$

et en mettant pour ε sa valeur,

$$(8)\left\{\begin{aligned} p' = {} & \left(1+\frac{s}{S}\,\frac{l'+c}{l-l'}\right)\left(\frac{n}{q}+P\right)\frac{al'+ac+\beta+\theta}{az+\beta+\theta} \\ & -\frac{s}{S}\,\frac{l'+c}{l-l'}\,\frac{(ac+\theta)\left(\frac{n}{q}+\varpi\right)+\beta\left(\frac{n}{q}+\pi'\right)}{az+\beta+\theta} \\ & -\frac{mz}{az+\beta+\theta}\left[\begin{aligned} & \left(\frac{n}{q}+P\right)(al'+ac+\beta+\theta) \\ & -(ac+\theta)\left(\frac{n}{q}+\varpi\right)-\beta\left(\frac{n}{n}+\pi'\right)\end{aligned}\right]-\frac{n}{q}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait dans cette formule

$$z = l + c,$$

et qu'ensuite on remplace m par sa valeur, il vient

$$(9)\quad \frac{n}{q}+\pi' = \frac{\left(1-\frac{s}{S}\right)\left(\frac{n}{q}+P\right)\frac{al'+ac+\beta+\theta}{al+ac+\beta+\theta}+\frac{s}{S}\,\frac{(ac+\theta)\left(\frac{n}{q}+\varpi\right.}{al+ac+\beta+}}{1-\frac{s}{S}\,\frac{\beta}{al+ac+\beta+\theta}}$$

Si dans cette équation on ne conserve que le terme multiplié par $\left(\frac{n}{q}+P\right)$, et qu'ensuite on résolve l'équation résultante par rapport à $\frac{s}{S}$, on trouve à très-peu près

$$(10)\qquad \frac{s}{S} = 1 - \frac{n+q\pi'}{n+qP}\,\frac{al+ac+\beta+\theta}{al'+ac+\beta+\theta},$$

laquelle servira à déterminer $\frac{s}{S}$ par l'observation de π' et de P.

Si dans l'équation (9) on fait encore $\pi' = \varpi$, on aura pour déterminer la course d'admission du maximum d'effet

$$(11)\qquad \frac{al'+ac+\beta+\theta}{al+ac+\beta+\theta} = \frac{n+q\varpi}{n+qP}\;\frac{1-\frac{s}{S}\,\frac{ac+\beta+\theta}{al+ac+\beta+\theta}}{1-\frac{s}{S}}.$$

TRAVAIL DE LA VAPEUR.

Remarquons maintenant que le travail de la vapeur, relati

à une course du piston, a pour expression

$$a\mathrm{R}l = a\mathrm{P}l' + \int_c^{l+c} ap'\,dz - al\left(\frac{n}{q} + \varpi\right).$$

Effectuant les intégrations, on trouve, après tous calculs faits,

$$(12)\left\{\begin{aligned} a\mathrm{R}l = &\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)\left[\begin{aligned} &al' + (al' + ac + \beta + \theta) \\ &\times \log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\end{aligned}\right] \\ &- al\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) - \frac{s}{\mathrm{S}}\left[\begin{aligned} &\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)(al' + ac + \beta + \theta) \\ &- ac + \theta)\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) - \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right)\end{aligned}\right] \\ &\times\left(1 - \frac{al' + ac + \beta + \theta}{a(l - l')}\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right).\end{aligned}\right.$$

Multipliant ce résultat par le nombre N des courses du piston en une minute, il vient pour le travail (en kilogrammètres) relatif à cet intervalle de temps,

$$(13)\left\{\begin{aligned} \mathrm{T}_m = &\,\mathrm{N}\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right) \\ &\times\left[al' + (al' + ac + \beta + \theta)\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right] \\ &- \mathrm{N}al\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) - \mathrm{N}\frac{s}{\mathrm{S}} \\ &\times\left[\begin{aligned} &\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)(al' + ac + \beta + \theta) - (ac + \theta)\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) \\ &- \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right)\end{aligned}\right] \\ &\times\left(1 - \frac{al' + ac + \beta + \theta}{a(l - l')}\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right),\end{aligned}\right.$$

formule qu'on peut réduire, à très-peu près, à la suivante :

$$(14)\left\{\begin{aligned} \mathrm{T}_m = &\,\mathrm{N}\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right) \\ &\times\left[\begin{aligned} &al' + (al' + ac + \beta + \theta)\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta} \\ &- \frac{s}{\mathrm{S}}(al' + ac + \beta + \theta)\end{aligned}\right] \\ &- \mathrm{N}al\left(\frac{n}{q} + \varpi\right).\end{aligned}\right.$$

En divisant ce résultat par 4500, on aura la force de la machine en chevaux.

VAPORISATION MÉCANIQUE.

A l'égard de la quantité S, elle sera donnée par la relation

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} S &= (n+q\mathrm{P})(al'+ac+\beta+\theta)-(ac+\theta)(n+q\varpi)\\ &\quad-\beta(n+q\pi'). \end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute à ce résultat la valeur de s tirée de l'équation (10), et qu'ensuite on multiplie par N, on aura la vaporisation mécanique de la machine en une minute, savoir :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} S &= \mathrm{N}\left(2-\frac{n+q\pi'}{n+q\mathrm{P}}\,\frac{al+ac+\beta+\theta}{al'+ac+\beta+\theta}\right)\\ &\quad\times\left[\begin{aligned}&(n+q\mathrm{P})(al'+ac+\beta+\theta)-(ac+\theta)(n+q\varpi)\\ &-\beta(n+q\pi')\end{aligned}\right]. \end{aligned}\right.$$

Négligeant les deux derniers termes compris entre les crochets, il vient à très-peu près

$$(17)\qquad S=\mathrm{N}\left[\begin{aligned}&2(n+q\mathrm{P})(al'+ac+\beta+\theta)\\ &\quad-(n+q\pi')(al+ac+\beta+\theta)\end{aligned}\right].$$

MACHINES DE WOLF.

Dans une machine de Wolf, le volume de vapeur a pour valeur, à la fin de l'admission,

$$(18)\quad S'=a(l'+c)-ac\frac{n+q\pi}{n+q\mathrm{P}}+\theta-\theta\frac{n+q\pi}{n+q\mathrm{P}}+\beta-\beta\frac{n+q\pi'}{n+q\mathrm{P}}.$$

Pendant la détente dans les deux cylindres, et quand le piston est à la distance z de l'extrémité du petit cylindre par où arrive la vapeur, ce volume a pour expression

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} S'' &= a(l+2c-z)+a_1c_1+\frac{a_1l_1}{l}(z-c)-ac\frac{n+q\pi}{n+qp}\\ &\quad-a_1c_1\frac{n+q\varpi}{n+qp}+\theta-\theta\frac{n+q\pi}{n+qp}+\beta_1-\beta_1\frac{n+q\pi}{n+qp}\\ &\quad+\theta_1-\theta_1\frac{n+q\varpi}{n+qp}; \end{aligned}\right.$$

on a également

$$(20)\qquad S' = \frac{S}{n + qP},$$

$$(21)\qquad S'' = \frac{\varepsilon_1 (S - s)}{n + qp},$$

S ayant ici la même signification que précédemment, et s désignant la quantité de vapeur condensée pendant la première détente dans le petit cylindre. Soit aussi s_1 le volume d'eau qui résulte de la vapeur condensée en une course pendant la deuxième détente; si l'on suppose que la quantité de vapeur condensée à un instant quelconque, depuis le commencement de la course pendant la deuxième détente, soit proportionnelle à z, cette quantité de vapeur condensée aura pour expressions

$$(1 - \varepsilon_1)(S - s)$$

et

$$s_1 \frac{z}{l + c}.$$

Egalant ces deux quantités, puis résolvant par rapport à ε_1, on trouve

$$(22)\qquad \varepsilon_1 = 1 - m_1 z,$$

en posant, pour abréger, $m_1 = \frac{s_1}{(S - s)(l + c)}$. Des deux équations (20) et (21), on tire

$$\frac{n}{q} + p = \frac{S'}{S''} \varepsilon_1 \frac{S - s}{S} \left(\frac{n}{q} + P\right),$$

et plus simplement

$$(23)\qquad \frac{n}{q} + p = \frac{S'}{S''} \varepsilon \left(\frac{n}{q} + P\right),$$

en faisant, pour abréger, $\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{S - s}{S}$. On a en même temps

$$(24)\qquad \varepsilon = 1 - \frac{s}{S} - \frac{s_1}{S} \frac{z}{l + c}.$$

Posant encore, pour abréger,

$$\mu = \theta + \beta_1 + \theta_1,$$
$$\lambda = \left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)(\beta + \theta) + \beta_1\left(\frac{n}{q} + \pi\right) + \theta_1\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) - \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right),$$

puis substituant dans l'équation (23) les valeurs précédentes de ε, S', S'', on trouve

$$(25)\quad \frac{n}{q} + p = \frac{a(l'+c)\left(\frac{n}{q}+\mathrm{P}\right) + a_1 c_1\left(\frac{n}{q}+\varpi\right) + \lambda - \left(\frac{s}{\mathrm{S}} + \frac{s_1}{\mathrm{S}}\frac{z}{l+c}\right)\left[\left(\frac{n}{q}+\mathrm{P}\right)(al'+ac+\beta+\theta) - (ac+\theta)\left(\frac{n}{q}+\pi\right) - \beta\left(\frac{n}{q}+\pi \ldots\right.\right.}{a(l+2c-z) + a_1 c_1 + \frac{a_1 l_1}{l}(z-c) + \mu}$$

En faisant dans cette formule

$$z = l + c,$$

on aura la pression π de la vapeur à la limite d'expansion dans les deux cylindres, savoir :

$$(26)\quad \frac{n}{q} + \pi = \frac{\left(1 - \frac{s+s_1}{\mathrm{S}}\right)\left(\frac{n}{q}+\mathrm{P}\right)(al'+ac+\beta+\theta) + (a_1 c_1 + \theta_1)\left(\frac{n}{q}+\varpi\right) - \beta\left(1 - \frac{s+s_1}{\mathrm{S}}\right)\left(\frac{n}{q}+ \ldots\right.}{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \theta + \theta_1 - (ac+\theta)\frac{s+s_1}{\mathrm{S}}}$$

De là on tire, à très-peu près,

$$(27)\quad \frac{s+s_1}{\mathrm{S}} = 1 - \frac{n+q\pi}{n+q\mathrm{P}}\,\frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \theta + \theta_1}{al' + ac + \beta + \theta},$$

laquelle servira à déterminer $\frac{s+s_1}{\mathrm{S}}$ par l'observation de π et de P.

Si dans l'équation (26) on fait encore $\pi = \varpi$, on aura, pour déterminer la course d'admission du maximum d'effet,

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{al'+ac+\beta+\theta}{al+ac+\beta+\theta} = \dfrac{n+q\varpi}{n+q\mathrm{P}} \\ \times\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{a_1 l_1 + ac + \theta}{al+ac+\theta} - \dfrac{s+s_1}{\mathrm{S}}\,\dfrac{ac+\theta}{al+ac+\theta}\right)\dfrac{1 - \dfrac{s}{\mathrm{S}}\,\dfrac{\beta}{al+ac+\beta+\theta}}{1 - \dfrac{s+s_1}{\mathrm{S}}} \\ \qquad + \dfrac{s}{\mathrm{S}}\,\dfrac{ac+\theta}{al+ac+\beta+\theta}\cdot\dfrac{\beta}{al+ac+\theta} \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

On peut remarquer que cette valeur de l' diffère très-peu de celle qu'on obtiendrait en faisant $s = 0$, $s_1 = 0$.

TRAVAIL DE LA VAPEUR.

Soient maintenant $\mathcal{T}_m$ et $\mathcal{T}'_r$ les travaux moteur et résistant dans le petit cylindre, et de même $\mathcal{T}''_m$ le travail moteur dans le grand cylindre; le travail résistant dans ce dernier cylindre étant $\varpi a_1 l_1$, si l'on nomme R la résistance moyenne totale sur les pistons, et h le chemin décrit par son point d'application, on aura, relativement à une course,

$$(29) \qquad \mathrm{R}h = \mathcal{T}_m + \mathcal{T}''_m - \mathcal{T}'_r - \varpi a_1 l_1.$$

D'abord, si dans la formule (12) on supprime le terme ϖal, et qu'ensuite on remplace ϖ par π dans le terme facteur de $\frac{s}{\mathrm{S}}$, on trouve

$$\mathcal{T}_m = \left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)\left[al' + (al' + ac + \beta + \theta)\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right] - \frac{n}{q}al$$
$$- \frac{s}{\mathrm{S}}\left[\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)(al' + ac + \beta + \theta) - (ac + \theta)\left(\frac{n}{q} + \pi\right) - \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right)\right]$$
$$\times\left(1 - \frac{al' + ac + \beta + \theta}{a(l - l')}\log\frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right).$$

Pour déterminer $\mathcal{T}'_r$ on a

$$\mathcal{T}'r = \int_c^{l+c} apdz.$$

Effectuant les intégrations, il vient

$$\mathcal{T}'_r = al\,\frac{a(l' + c)\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right) + a_1 c_1\left(\frac{n}{q} + \varpi\right) + \lambda}{a_1 l_1 - al}$$
$$\times \log\frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} - \frac{n}{q}al - \frac{al}{a_1 l_1 - al}$$
$$\times\left[\left(\frac{n}{q} + \mathrm{P}\right)(al' + ac + \beta + \theta) - (ac + \theta)\left(\frac{n}{q} + \pi\right) - \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right)\right]$$
$$\times\left[\begin{array}{l} \frac{s}{\mathrm{S}}\log\frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} + \frac{s_1}{\mathrm{S}}\frac{l}{l + c} \\ -\frac{s_1}{\mathrm{S}}\frac{l}{l + c}\left(\frac{al + a_1 c_1 + ac + \mu}{a_1 l_1 - al} - \frac{c}{l}\right)\log\frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu}\end{array}\right].$$

La quantité $\mathfrak{T}''_m$ se déduit sans peine de $\mathfrak{T}'_r$; en effet,

$$\mathfrak{T}''_m = \int a_1 p dz_1.$$

Mais

$$\frac{z_1 - c_1}{z - c} = \frac{l_1}{l}, \quad \text{d'où} \quad dz_1 = \frac{l_1}{l} dz;$$

par suite

$$\mathfrak{T}''_m = \frac{a_1 l_1}{al} \int_c^{l+c} apdz = \frac{a_1 l_1}{al} \mathfrak{T}'_r.$$

Substituant ces diverses valeurs dans (29), et multipliant ensuite le résultat par le nombre N des courses en une minute, on trouve en définitive, pour la force totale en kilogrammètres, que la machine développe par minute,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
T_m = {} & N\left(\frac{n}{q} + P\right) \\
& \times \left[\begin{aligned} & al' + (al' + ac + \beta + \theta) \log \frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta} \\ & + a(l' + c) \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} \end{aligned}\right] \\
& - N\left(\frac{n}{q} + \varpi\right)\left(a_1 l_1 - a_1 c_1 \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu}\right) \\
& + N \lambda \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} \\
& - N\left[\left(\frac{n}{q} + P\right)(al' + ac + \beta + \theta) - (ac + \theta)\left(\frac{n}{q} + \pi\right) - \beta\left(\frac{n}{q} + \pi'\right)\right] \\
& \times \left[\begin{aligned} & \frac{s}{S}\left(1 + \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} - \frac{al' + ac + \beta + \theta}{a(l - l')} \log \frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right) \\ & + \frac{s_1}{S} \frac{l}{l + c} - \frac{s_1}{S} \frac{l}{l + c}\left(\frac{al + a_1 c_1 + ac + \mu}{a_1 l_1 - al} - \frac{c}{l}\right) \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} \end{aligned}\right].
\end{aligned}\right.$$

Si la machine ne détend pas dans le petit cylindre, on fera dans cette formule

$$l' = l, \quad s = 0.$$

La formule (30) peut être remplacée, à très-peu près, par

la suivante :

$$(31)\left\{\begin{aligned}&T_m = N\left(\frac{n}{q}+P\right)\\&\times\left\{\begin{aligned}&al'+(al'+ac+\beta+\theta)\log\frac{al+ac+\beta+\theta}{al'+ac+\beta+\theta}\\&+(al'+ac+\beta+\theta)\log\frac{a_1l_1+a_1c_1+ac+\mu}{al+a_1c_1+ac+\mu}\\&-(al'+ac+\beta+\theta)\frac{s+s_1}{S}\end{aligned}\right\}\\&-N\left(\frac{n}{q}+\varpi\right)\left(a_1l_1-a_1c_1\log\frac{a_1l_1+a_1c_1+ac+\mu}{al+a_1c_1+ac+\mu}\right).\end{aligned}\right.$$

VAPORISATION MÉCANIQUE.

A l'égard de la quantité S, elle sera donnée par la relation

$$(32)\quad S=(n+qP)(al'+ac+\beta+\theta)-(ac+\theta)(n+q\pi)-\beta(n+q\pi').$$

Si l'on ajoute à ce résultat la valeur de $s+s_1$ tirée de l'équation (27), et qu'ensuite on multiplie par N, on aura la vaporisation mécanique de la machine par minute, savoir

$$(33)\left\{\begin{aligned}&S=N\left(2-\frac{n+q\pi}{n+qP}\,\frac{a_1l_1+a_1c_1+ac+\theta+\theta_1}{al'+ac+\beta+\theta}\right)\\&\times[(n+qP)(al'+ac+\beta+\theta)-(ac+\theta)(n+q\pi)-\beta(n+q\pi')].\end{aligned}\right.$$

Négligeant les deux derniers termes compris entre les crochets, il vient à très-peu près

$$(34)\quad S=N\left[\begin{aligned}&2(n+qP)(al'+ac+\beta+\theta)\\&-(n+q\pi)(a_1l_1+a_1c_1+ac+\theta+\theta_1)\end{aligned}\right].$$

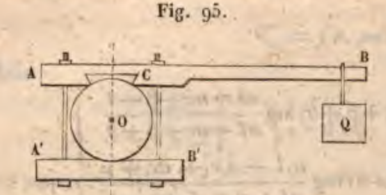
DE LA MESURE DE LA FORCE UTILE PRISE SUR UNE MACHINE A VAPEUR.

1°. PAR L'EMPLOI DU FREIN DE PRONY.

61. Ce frein consiste en un levier AB (*fig.* 95) présentant en C une échancrure circulaire qu'on applique sur une poulie de même rayon, et montée sur l'arbre tournant dont on

veut mesurer le travail. Une seconde pièce A′B′, creusée circulairement comme la première, s'applique sur la partie inférieure de la poulie qu'on serre entre les pièces C, A′B′ au moyen de boulons, jusqu'à ce que la vitesse de la machine et la pression d'admission dans le cylindre moteur soient les mêmes que lorsque la machine marche avec sa charge ordinaire, qu'on supprime en tout ou en partie pendant la durée de l'expérience. On maintient le frein dans une position sensiblement horizontale au moyen de poids mis dans le plateau d'une balance. Cette condition peut être regardée comme remplie, lorsque le levier AB oscille doucement et régulièrement de chaque côté de sa position horizontale. Alors le travail absorbé par le frottement sur le frein est évidemment égal au travail dû à la résistance supprimée, puisque la résistance artificielle appliquée sur la machine produit identiquement le même effet que la résistance qu'on veut mesurer.

Fig. 95.



Soit F la résultante des actions du frottement; on a pour un tour entier de l'arbre, et en nommant r le rayon de la poulie,

$$T_u = 2\pi r F.$$

Mais les forces Q et F se faisant équilibre, on a, en nommant q le bras de levier du poids total Q qui agit à l'extrémité du frein,

$$Fr = Qq;$$

donc aussi

$$T_u = 2\pi N Q q,$$

en désignant par N le nombre de tours de l'arbre en une minute. Divisant ce résultat par 4500, il vient en définitive pour la valeur de T_u en chevaux,

$$(1) \qquad T_u = \frac{\pi N Q q}{2250}.$$

Dans la pratique, il faudra joindre aux poids mis dans le pla-

teau, 1° le poids de la balance, 2° le poids du levier AB pesé à la distance du point d'attache et maintenu dans une position horizontale, quand il est librement posé sur la poulie.

FREIN DE M. THÉODORE BARROIS.

Si l'on remplace les poids variables par des poids fortement boulonnés en B, on aura le frein oblique et à poids constant de M. Théodore Barrois. La formule (1) convient aussi à ce frein, en prenant pour Q le poids de celui-ci, et pour q la distance horizontale du centre de rotation au centre de gravité du système.

2°. PAR L'OBSERVATION DE LA PRESSION D'ADMISSION.

L'opération du frein présente des difficultés pratiques de plus d'un genre, mais le plus grand de ses inconvénients résulte de ce qu'il faut arrêter le travail dans la manufacture, pendant un temps plus ou moins long. On verra ci-après qu'une telle opération peut se remplacer par une simple observation de la pression d'admission.

Je considère d'abord une machine à vapeur à un seul cylindre. Si l'on supprime une partie de la charge que mène la machine, la pression P deviendra $P - \delta P$, N deviendra $N + \delta N$, T_m se réduira à $T_m - \delta T_m$, et l'on aura, pour déterminer δT_m (*voir* la formule 14 du numéro précédent), à très-peu près

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\delta T_m = N\delta P \\ &\quad \times \left[\begin{aligned} &al' + (al' + ac + \beta + \theta) \\ &\times \log \frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta} - \frac{s}{S}(al' + ac + \beta + \theta) \end{aligned} \right] \\ &\quad - \frac{\delta N}{N} T_m. \end{aligned} \right.$$

Telle est la valeur du travail utile absorbé par la résistance supprimée.

Je suppose, par exemple, qu'on veuille mesurer la quantité de force prise par un atelier de manufacture. On suspendra le travail dans cet atelier pendant dix à quinze minutes; on observera la diminution de la pression d'admission dans le cylindre en installant sur celui-ci un manomètre convenable, par

exemple un manomètre Desbordes, et l'on aura δP. On comptera aussi le nombre des courses du piston en une minute; ce nombre, comparé avec celui obtenu avant de débrayer l'atelier, fera connaître δN. Pareillement, l'observation de π' permettra d'obtenir $\frac{s}{S}$ à l'aide de la formule (10) du numéro précédent; on aura ainsi tous les éléments de la formule (2).

La formule (31) du numéro précédent donnera pareillement, pour une machine de Wolf,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta T_m = {} & N \delta P \\ & \times \left[\begin{aligned} & al' + (al' + ac + \beta + \theta)\left(\log \frac{al + ac + \beta + \theta}{al' + ac + \beta + \theta}\right. \\ & \left. + \log \frac{a_1 l_1 + a_1 c_1 + ac + \mu}{al + a_1 c_1 + ac + \mu} - \frac{s + s_1}{S}\right) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{\delta N}{N} T_m. \end{aligned}\right.$$

Je ferai remarquer, en terminant ce numéro, que le terme de T_m qui dépend de la pression ϖ derrière le piston paraît être le plus sujet à erreur, car cette pression est probablement souvent supérieure à la pression mesurée dans le condenseur, ou à la pression atmosphérique, suivant que la machine condense ou ne condense pas. Or on peut remarquer que cette erreur est pour ainsi dire éliminée de la formule du travail utile, à cause du facteur $\frac{\delta N}{N}$ qui est toujours très-petit, le régulateur de la machine maintenant les variations de la vitesse entre des limites ordinairement très-étroites.

La théorie de la machine à vapeur, telle qu'elle vient d'être exposée, est extraite d'une série de Mémoires, que nous avons présentés à l'Académie des Sciences, et qui pour la plupart ont été insérés dans les *Comptes rendus* (1). Ces divers travaux ont tous été insérés dans les *Annales de la Société de Lille*, années 1857 et 1858.

(*) *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séances des 20 août 1855, 14 février, 15 juin, 21 septembre, 12 octobre 1857, 4 janvier 1858.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

DES MACHINES QUAND LEUR VITESSE EST VARIABLE. — PRINCIPE DE D'ALEMBERT. — PRINCIPE DES FORCES VIVES. — THÉORÈME DE CARNOT.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

62. Lorsque des points matériels, liés entre eux d'une manière quelconque, sont sollicités par des forces aussi quelconques P, P', P'',... qui peuvent varier à chaque instant, soit en grandeur, soit en direction, ces points ne suivront pas généralement les directions des forces qui agissent sur eux, de sorte que les variations de vitesse qui auront lieu pendant chaque instant infiniment petit seront dirigées suivant des droites faisant chacune un certain angle avec la direction de la force correspondante. Si l'on désigne par a, a', a'',... ces variations de vitesse, les forces F, F', F'',..., capables de les produire, auront pour valeurs, en nommant m, m', m'',... les masses des points matériels,

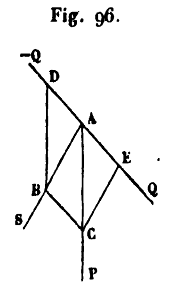
$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} F = m\,\dfrac{a}{\tau}, \\ F' = m'\,\dfrac{a'}{\tau}, \\ F'' = m''\,\dfrac{a''}{\tau}, \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Cela posé, si l'on applique à la masse m, au commencement de l'instant τ, une force égale et contraire à F, et si l'on fait la même chose pour les masses m', m'', m''',..., il est évident que l'on détruira toutes les variations de vitesses; alors chaque point m se mouvra d'un mouvement uniforme pendant l'instant infiniment petit que l'on considère, et il y aura équi-

libre entre les forces données et les forces effectives F prises en sens contraire de leurs directions. Dans l'instant suivant, la même chose aura évidemment encore lieu, et ainsi de suite. Donc *pendant toute la durée du mouvement d'un système matériel, il y aura constamment équilibre entre les forces données qui sollicitent les divers points du système et les forces effectives prises en sens contraire de leurs directions.* Ce principe est dû à d'Alembert ; il ramène toutes les questions de mouvement à de simples questions d'équilibre.

Le principe de d'Alembert est susceptible d'un autre énoncé. Soient $P = AC$ (*fig.* 96) la force donnée qui agit sur la masse m supposée en A, et $Q = AE$ la force effective. Prenant $AD = AE$ et construisant le parallélogramme ADBC, la résultante des forces P et $-Q$ sera $S = AB$; et comme les forces telles que P et $-Q$ se font équilibre, il en sera de même des forces S qui sont les forces *perdues*. Par conséquent, *dans tout système matériel les forces perdues se font équilibre pendant toute la durée du mouvement.* On peut remarquer que les deux forces S et Q ont pour résultante P; d'où il suit que *la force perdue est la force qui, étant composée avec la force effective, produit la force donnée.* Ce sont les forces perdues qui produisent les réactions qui naissent pendant le déplacement du système matériel.

Fig. 96.



PRINCIPE DES FORCES VIVES OU DE LA TRANSMISSION DU TRAVAIL.

63. Puisque les forces données $P, P', P'', \ldots$, qui agissent sur le système, sont tenues en équilibre par les forces effectives $m\frac{a}{\tau}, m'\frac{a'}{\tau}, m''\frac{a''}{\tau}, \ldots$ prises en sens contraire de leurs directions, on aura, en vertu de l'équation du travail,

$$Pp + P'p' + P''p'' \ldots - m\frac{a}{\tau}\epsilon - m'\frac{a'}{\tau}\epsilon' - m''\frac{a''}{\tau}\epsilon'' - \ldots = 0.$$

$p, p', p'', \ldots$ sont les projections faites sur les directions des forces des chemins parcourus dans le temps τ par leurs points d'applications, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$, les déplacements effectifs. Il est évident que les travaux élémentaires des forces effectives prises en sens contraire de leurs directions, sont tous des travaux résistants ou négatifs. Soient $v_0, v'_0, v''_0, \ldots$, les vitesses des mobiles $m, m', m'', \ldots$, au commencement de l'intervalle de temps pour lequel on calcule le travail, on aura

$$\varepsilon = v_0 \tau, \quad \varepsilon' = v'_0 \tau, \quad \varepsilon'' = v''_0 \tau \ldots,$$

et l'équation ci-dessus deviendra

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = mav_0 + m'a'v'_0 + m''a''v''_0 + \ldots.$$

Dans l'instant suivant on aura de même

$$P_1 p_1 + P'_1 p'_1 + P''_1 p''_1 \ldots = ma_1 v_1 + m'a'_1 v'_1 + m''a''_1 v''_1 + \ldots.$$

Dans le troisième instant, on aura pareillement

$$P_2 p_2 + P'_2 p'_2 + P''_2 p''_2 \ldots = ma_2 v_2 + m'a'_2 v'_2 + m''a''_2 v''_2 + \ldots,$$

et ainsi de suite, jusqu'au dernier instant de la période proposée. Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, et nommant T la somme algébrique des travaux des forces $P, P', P'', \ldots$, il vient

$$(1) \qquad T = \Sigma m (av_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 \ldots + a_{n-1} v_{n-1}).$$

Le signe Σ s'étend à tous les points matériels du système, n désigne le nombre d'instants τ que contient la période proposée.

Quelle que soit la trajectoire décrite par chaque mobile, on peut la partager en intervalles infiniment petits tels que de l'un à l'autre la vitesse varie d'une même quantité telle que a. On peut donc poser

$$a = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots,$$

et la valeur de T devient

$$(2) \qquad T = \Sigma ma (v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} \quad \text{ou} \quad v);$$

mais $v_0, v_1, v_2, \ldots$, sont les termes d'une progression arith-



métique dont la raison est a et qui est composée de n termes; faisant la somme, on trouve

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v = \frac{(v_0 + v)n}{2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (2), il vient

$$T = \Sigma ma \frac{(v_0 + v)n}{2}.$$

Mais $na = v - v_0$, en négligeant le terme infiniment petit a; donc

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (v - v_0)(v + v_0),$$

et enfin

$$(3) \qquad T = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2),$$

ce qui est l'*équation des forces vives, ou le principe de la transmission du travail. Une quantité telle que mv^2 est dite la force vive de la masse m.*

* Le calcul intégral fournit une démonstration très-simple du principe des forces vives. En effet, l'équation du travail peut s'écrire

$$\Sigma Pp = \Sigma m \frac{dv}{dt} \varepsilon.$$

Mais

$$\varepsilon = vdt;$$

donc

$$\Sigma Pp = \Sigma mvdv.$$

Intégrant depuis $v = v_0$ jusqu'à v, on trouve

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2).$$

MOUVEMENT VERTICAL D'UN CORPS.

64. 1°. Considérons un corps de forme quelconque lancé verticalement de haut en bas d'une hauteur donnée, et dont tous les points décrivent des droites parallèles. Soient v_0 la vitesse initiale, et v la vitesse du mobile quand il a parcouru l'espace h. Le travail de la pesanteur étant Ph (*voir* page 69) (P est le

poids du corps), on aura

$$Ph = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2).$$

Mais le facteur $(v^2 - v_0^2)$ est le même pour toutes les molécules; on peut donc le faire sortir du signe Σ, et il vient

$$Ph = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) \Sigma m = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) \frac{P}{g};$$

d'où l'on tire

(1) $$h = \frac{1}{2g} (v^2 - v_0^2).$$

Si l'on résout cette équation par rapport à v, on trouve

(2) $$v = \sqrt{2gh + v_0^2}.$$

Si le mobile part du repos $v_0 = 0$, et l'on a simplement

(3) $$v = \sqrt{2gh}.$$

Reprenons l'équation (1). Comme dans chaque seconde l'accélération de la vitesse est g, on aura, après t secondes,

(4) $$v = v_0 + gt;$$

substituant cette valeur dans l'équation citée, on trouve

(5) $$h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2.$$

Si le mobile part du repos $v_0 = 0$, et l'on a simplement

(6) $$h = \frac{1}{2} gt^2.$$

2°. Soit maintenant un corps lancé verticalement de bas en haut, et dont tous les points décrivent des droites parallèles; P étant toujours le poids du corps, le travail de la pesanteur sera $-Ph$, quand le mobile aura parcouru l'espace h; v étant la vitesse à ce moment, on aura

$$-Ph = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (v^2 - v_0^2);$$

d'où l'on tire

(7) $$h = \frac{1}{2g}(v_0^2 - v^2).$$

Si l'on résout cette équation par rapport à v, on trouve

(8) $$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Comme v doit être une quantité réelle, il faut que $2gh$ soit moindre que v_0^2, ou tout au plus égal ; on aura donc

(9) $$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

pour la plus grande hauteur à laquelle le mobile pourra s'élever. On a en même temps $v = 0$, ce qui est d'ailleurs évident.

Reprenons l'équation (7). On a, à un instant quelconque,

(10) $$v = v_0 - gt;$$

par suite la valeur de h devient

(11) $$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ce sont les formules connues du mouvement vertical des corps.

MOUVEMENT DES MACHINES QUAND LEUR VITESSE EST VARIABLE.

65. Reprenons l'équation des forces vives, savoir

(1) $$T = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2),$$

et mettons en évidence les divers travaux qui entrent dans T. Ces travaux sont :

Le travail moteur.. T_m.
Le travail développé par la résistance principale ou le travail utile.. T_u.
Le travail dû aux forces passives, telles que les frottements, la résistance de l'air, le défaut de stabilité des supports, etc. T_p.

Remplaçant T par sa valeur

(2) $$T = T_m - T_u - T_p,$$

il vient

$$(3) \qquad T_m = T_u + T_p + \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2).$$

Cette équation fait voir que dans le mouvement d'une machine de forme et de nature quelconques, le travail moteur se décompose en trois parties :

L'une T_u destinée à vaincre les résistances utiles;

L'autre T_p destinée à vaincre les résistances nuisibles;

La troisième $\frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2)$ est employée à faire varier la vitesse de la machine.

Si le mouvement de chaque point matériel est uniforme $v = v_0$, et la formule (3) devient simplement

$$(4) \qquad T_m = T_u + T_p,$$

de sorte que, dans ce cas, tout le travail moteur se change en travail résistant, utile ou nuisible. Cette dernière propriété a fait donner à l'équation des forces vives la dénomination de *principe de la transmission du travail.*

IMPOSSIBILITÉ DU MOUVEMENT PERPÉTUEL.

Le mouvement perpétuel est impossible. En effet, supposons $T_m = 0$, $T_u = 0$, et je dis que la machine s'arrêtera. En vertu de ces hypothèses, l'équation des forces vives devient

$$T_p - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \frac{1}{2}\Sigma mv^2 = 0.$$

Or T_p croît continuellement, et par degrés insensibles, jusqu'à devenir aussi grand qu'on voudra. Donc si le mouvement de la machine se continue indéfiniment, on aura, à un certain moment,

$$T_p - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = 0,$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = 0.$$

Ce qui exige que la vitesse de chaque point materiel du système devienne nulle; donc la machine s'arrêtera. C. Q. F. D.

Si l'on compte le travail depuis l'instant où la machine commence à se mouvoir, jusqu'à ce qu'elle s'arrête, on aura

$$v_0 = 0, \quad v = 0,$$

et l'équation (1) deviendra

$$T_m = T_u + T_p,$$

de sorte que *dans cet intervalle tout le travail moteur se changera en travail résistant.*

On conclut de là que *si à certaines époques le travail moteur augmente, cet accroissement de travail se mettra en réserve sur les pièces de la machine pour se dépenser plus tard.*

Si l'intervalle pendant lequel on compte le travail commence et finit quand les pièces de la machine reprennent la même vitesse, on aura

$$v = v_0,$$

et par suite

$$T_m = T_u + T_p,$$

de sorte que dans cette hypothèse tout le travail moteur se change encore en travail résistant. On conclut de là que *les formules relatives à la machine à vapeur conviennent aussi au cas où le mouvement n'est pas uniforme dans l'intervalle de temps pendant lequel on mesure le travail, si le piston se meut avec la même vitesse au commencement et à la fin de cette période.*

Si l'on suppose $v = 0$, l'équation des forces vives donne

$$T_m - T_u - T_p = -\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2.$$

Ce qui prouve que, dans ce cas, le travail résistant surpasse le travail moteur. Pour bien saisir la signification de cette particularité, il faut remarquer qu'on ne peut avoir $v = 0$ que parce que la force motrice cesse d'agir après un certain temps. A partir de ce moment, la machine ayant continué de mar-

cher avec la vitesse acquise, a produit une certaine quantité de travail qui, en s'ajoutant à $T_u + T_p$, a fini par surpasser T_m. Ce travail, produit par la machine en vertu des vitesses acquises, a pour valeur $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$.

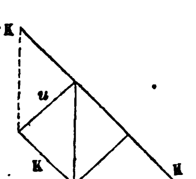
CHOCS DES CORPS EN LES SUPPOSANT DÉPOURVUS D'ÉLASTICITÉ. — THÉORÈME DE CARNOT.

66. Les chocs, ou percussions, ont pour effet d'imprimer aux mobiles de très-grandes vitesses dans des temps excessivement courts, dont la durée est inappréciable, et pendant lesquels les mobiles ne changent pas sensiblement de position. *Si, à un instant quelconque de la durée du choc, on applique à chaque molécule une force qui, pendant un temps égal à celui qui s'est écoulé depuis le commencement du phénomène, imprime à cette molécule une vitesse égale et contraire à la variation effective de sa vitesse*, il y aura, comme dans le cas ordinaire, équilibre entre ces forces et les forces motrices données qui sollicitent le système. Il est aussi évident que pendant toute la durée du phénomène, on peut regarder comme constantes les forces motrices ordinaires. Cela posé, soient K la vitesse à la fin du choc, K_0 la vitesse au commencement du choc, et u la résultante de la vitesse K_0 et de la vitesse K prise en sens contraire de sa direction. Je dis qu'on aura

$$(1) \qquad \Sigma m (K^2 - K_0^2) + \Sigma m u^2 = 0.$$

Soient A, B, C et a, b, c les composantes des vitesses K_0 et K (*fig.* 97) décomposées parallèlement aux axes des coordonnées et relatives à la molécule m. Adoptons une notation analogue pour les autres molécules. Soit aussi P la force qui sollicite m, et nommons δA, δB, δC et $\delta' A$, $\delta' B$, $\delta' C$ les variations des vitesses A, B, C dues aux réactions développées pendant le choc, et aux autres forces qui sollicitent le système; appelant θ la durée du choc, on aura pour les

Fig. 97.



composantes de la force capable de détruire les variations effectives de la vitesse,

$$(2)\quad \begin{cases} F_x = m\,\dfrac{\delta A + \delta' A}{\theta}, \\ F_y = m\,\dfrac{\delta B + \delta' B}{\theta}, \\ F_z = m\,\dfrac{\delta C + \delta' C}{\theta}. \end{cases}$$

En appliquant ces forces en sens contraire de leurs directions, elles feront équilibre aux autres forces P, P′, P″, etc., du système. Les forces perdues pendant le choc auront donc pour composantes relativement à la masse m,

$$P_x - m\,\frac{\delta A + \delta' A}{\theta} = -m\,\frac{\delta A}{\theta} = \frac{m}{\theta}(A - a + \delta' A),$$

$$P_y - m\,\frac{\delta B + \delta' B}{\theta} = -m\,\frac{\delta B}{\theta} = \frac{m}{\theta}(B - b + \delta' B),$$

$$P_z - m\,\frac{\delta C + \delta' C}{\theta} = -m\,\frac{\delta C}{\theta} = \frac{m}{\theta}(C - c + \delta' C).$$

On aura des résultats analogues pour les autres molécules du système.

Projetant sur ces forces le chemin infiniment petit décrit par chaque point m, dans l'instant qui suit la fin du choc, et nommant δx, δy, δz, etc., ces projections, il vient

$$(3)\quad \frac{1}{\theta}\Sigma m[(A-a+\delta' A)\delta x+(B-b+\delta' B)\delta y+(C-c+\delta' C)\delta z]=0.$$

Or on peut supposer que la durée du choc est la même pour chaque molécule; donc le facteur θ est commun à tous les termes de la somme. D'un autre côté, les forces motrices, autres que les percussions, ne produisent des variations sensibles de vitesse que dans des temps appréciables; il en résulte que les termes $\delta' A$, $\delta' B$, $\delta' C$ sont insensibles par rapport aux variations de vitesse δA, δB, δC dues aux chocs; par suite l'équation (3) devient

$$(4)\quad \Sigma m[(A-a)\delta x+(B-b)\delta y+(C-c)\delta z]=0.$$

Mais

$$\delta x = a\tau, \quad \delta y = b\tau, \quad \delta z = c\tau;$$

donc l'équation ci-dessus prend la forme

(5) $$\Sigma m[(A-a)a + (B-b)b + (C-c)c] = 0.$$

Développant, on trouve

(6) $$\Sigma m(a^2 + b^2 + c^2) = \Sigma m(Aa + Bb + Cc).$$

Mais on a identiquement

$$\Sigma m[(A-a)^2 + (B-b)^2 + (C-c)^2] = \Sigma m(A^2 + B^2 + C^2)$$
$$+ \Sigma m(a^2 + b^2 + c^2) - 2\Sigma m(Aa + Bb + Cc).$$

Substituant dans cette équation la valeur ci-dessous de

$$\Sigma m(Aa + Bb + Cc),$$

il vient

$$\Sigma m(a^2 + b^2 + c^2) - \Sigma m(A^2 + B^2 + C^2)$$
$$+ \Sigma m[(A-a)^2 + (B-b)^2 + (C-c)^2] = 0.$$

Mais

$$A^2 + B^2 + C^2 = K_0^2, \quad a^2 + b^2 + c^2 = K^2,$$
$$[(A-a)^2 + (B-b)^2 + (C-c)^2] = u^2;$$

donc enfin

$$\Sigma m(K^2 - K_0^2) + \Sigma m u^2 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration précédente est peut-être un peu compliquée. En voici une autre plus simple, déduite de celle que M. Bertrand a donnée d'un théorème de M. Sturm, plus général que celui de Carnot (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 15 décembre 1856).

Le triangle intermédiaire de la *fig.* 97 donne

$$K_0^2 = K^2 + u^2 - 2Ku\cos(K, u).$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par m, il vient

$$mK_0^2 = mK^2 + mu^2 - 2muK\cos(K, u).$$

Pour une seconde molécule m' on aurait pareillement

$$m'K_0'^2 = m'K'^2 + m'u'^2 - 2m'u'K'\cos(K', u'),$$

et ainsi de suite. Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, on obtient

$$\Sigma m(K_0^2 - K^2) = \Sigma mu^2 - 2\Sigma muK\cos(K, u).$$

Soit F une force contraire à u et capable de produire cette vitesse dans le temps θ de la durée du choc, on aura

$$F = m\frac{u}{\theta}, \quad \text{d'où} \quad mu = F\theta.$$

Par suite, l'égalité ci-dessus devient

$$\Sigma m(K_0^2 - K^2) = \Sigma mu^2 - 2\Sigma FK\theta\cos(K, u).$$

Mais $K\theta\cos(K, u)$ est la projection faite sur F du chemin $K\theta$ décrit après le choc dans le temps θ par le molécule m; par conséquent $FK\theta\cos(K, u)$ est le travail de la force F dans le temps θ; donc $\Sigma FK\theta\cos(K, u)$ représente la somme des travaux élémentaires des forces F pour les divers éléments du temps θ; et comme chaque somme en particulier est nulle, il en résulte

$$\Sigma FK\theta\cos(K, u) = 0,$$

alors l'égalité ci-dessus devient

$$\Sigma m(K_0^2 - K^2) = \Sigma mu^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

DES CHOCS DANS LES MACHINES.

Recherchons maintenant le travail développé pendant un temps donné quand il y a des chocs dans les machines. Soient toujours v et v_0 les vitesses qui ont lieu au commencement et à la fin de la période que l'on considère et pouvant comprendre un ou plusieurs chocs; supposons-en un seul pour plus de simplicité. Adoptant les mêmes notations qu'au n° 65, désignant de plus par $\mathfrak{T}$ le travail dû aux forces qui naissent de la percussion, nous aurons toujours

(7) $$T_m - T_u - T_p + \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2).$$

Mais

(8) $$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\Sigma m(K^2 - K_0^2);$$

donc

$$T_m - T_n - T_p = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\Sigma m(K_0^2 - K^2).$$

Or, en vertu du théorème de Carnot,

$$\Sigma m(K_0^2 - K^2) = \Sigma mu^2,$$

par suite

$$(9) \qquad T_m - T_n - T_p = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\Sigma mu^2.$$

S'il y avait plusieurs chocs au lieu d'un seul, le premier membre de l'équation (7) s'augmenterait d'un terme tel que $\mathfrak{C}$ pour chaque choc; transposant ensuite ces termes au deuxième membre, et remplaçant chacun d'eux par sa valeur, on introduirait dans ce deuxième membre, pour chaque choc, un terme tel que $\frac{1}{2}\Sigma mu^2$. Donc l'équation (9) sera générale si le signe Σ du dernier terme s'étend, non-seulement à toutes les molécules qui éprouvent des percussions, mais aussi à toutes les percussions.

Supposons maintenant que la machine partant de la vitesse v_0 arrive sans choc à la vitesse v; on aura, en nommant T'_r le travail résistant brut,

$$T_m - T'_r = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2).$$

Mais quand il y a des chocs

$$T_m - T_r = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\Sigma mu^2;$$

retranchant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$(10) \qquad T'_r - T_r = \frac{1}{2}\Sigma mu^2.$$

Ce qui montre que les chocs occasionnent des pertes de travail qui peuvent être considérables.

Si, par exemple, u a la même valeur pour toutes les molécules, l'équation (10) devient

$$T'_r - T_r = \frac{1}{2}u^2\Sigma m.$$

CHOC DE DEUX SPHÈRES NON ÉLASTIQUES.

Soient deux sphères en mouvement sur une ligne droite, et dont tous les points décrivent des droites parallèles à la ligne des centres; m et m' étant leurs masses, v la vitesse commune après le choc, v_0 et v'_0 les vitesses respectives avant le choc, on aura, en vertu du théorème de Carnot,

$$m(v^2 - v_0^2) + m'(v^2 - v'^2_0) + m(v - v_0)^2 + m'(v - v'_0)^2 = 0;$$

réduisant et résolvant par rapport à v, on obtient

$$(11) \qquad v = \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'}.$$

Si la masse m' est au repos, la vitesse commune après le choc sera

$$(12) \qquad v = \frac{m}{m + m'} v_0.$$

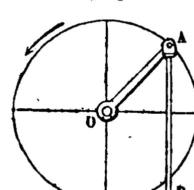
DIX-HUITIÈME LEÇON.

THÉORIE DES MANIVELLES ET DES VOLANTS.

DÉFINITIONS DES MANIVELLES.

67. Une manivelle consiste généralement en un bras de levier tel que OA (*fig.* 98), monté sur un arbre O, auquel il transmet un mouvement de rotation. L'extrémité A de la manivelle s'articule avec une bielle AB, laquelle fait tourner la manivelle pendant qu'elle-même exécute un mouvement oscillant de va-et-vient, qu'elle reçoit du moteur, comme par exemple du piston d'une machine à vapeur. Si la manivelle n'a qu'un bras, elle prend le nom de *manivelle simple*; elle s'appelle *manivelle double* si elle a deux bras sur chacun desquels agit la force motrice, et ainsi de suite. La longueur de la bielle étant généralement cinq à six fois plus grande que celle de la manivelle, il en résulte que, dans toutes ses positions, la bielle est très-peu inclinée sur la tige du piston, de sorte que nous pourrons la regarder comme étant toujours à très-peu près parallèle à elle-même, et par conséquent dirigée suivant la verticale, si le piston est lui-même vertical. En second lieu, quoique la force motrice qui agit suivant la bielle soit généralement variable, nous la regarderons comme constante, ou plutôt nous la remplacerons par une force F qui, pour chaque révolution ou demi-révolution de la manivelle, fasse le même travail que la force motrice vraie.

Fig. 98.



MANIVELLES SIMPLES A SIMPLE ET A DOUBLE EFFET.

Lorsque la force motrice n'agit sur la manivelle que pendant une demi-révolution de celle-ci, la manivelle est dite *à simple*

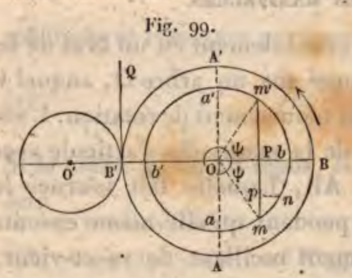
effet. Elle est *à double effet* lorsqu'elle agit dans un sens pendant une demi-révolution, et en sens contraire pendant l'autre demi-révolution.

MANIVELLES SIMPLES A SIMPLE EFFET.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE.

Soient O (*fig.* 99) l'arbre que fait tourner la manivelle, et mm' la direction de la force motrice F qui agit à l'aide de la bielle sur le bouton m. Supposons une roue ABA'B' montée sur l'arbre de la manivelle, tournant dans le sens de la flèche, et transmettant son mouvement à une autre roue O', qui fait tourner un autre arbre sur lequel sont montées les poulies de transmission. Cette roue O' oppose au mouvement de la roue motrice une résistance que j'appellerai Q, et comme le mouvement de la roue motrice doit être périodiquement uniforme, il faudra que, pour chaque révolution, le travail de Q soit égal au travail de F. Nommant r le rayon du cercle que décrit le bouton de la manivelle, r' le rayon de la roue ABA'B', on aura, à cause que la manivelle est à simple effet,

Fig. 99.



$$Q . 2\pi r' = F . 2r,$$

d'où

$$(1) \qquad Q = \frac{Fr}{\pi r'}.$$

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE DE LA MANIVELLE.

Supposons le bouton en m ; partageons la circonférence $aba'b'$ en n parties égales infiniment petites, et soit $mn = s$ l'une de ces parties ; le travail de F, pendant que le bouton de la manivelle décrit l'arc mn, a pour valeur

$$\mathcal{E}F = F . mp.$$

Mais les triangles rectangles mnp, OmP sont semblables, ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; donc

$$\frac{mp}{mn}=\frac{OP}{Om}, \quad \text{ou} \quad \frac{mp}{s}=\frac{x}{r},$$

en posant, pour abréger, $OP=x$. De là on tire

$$mp=\frac{sx}{r};$$

la valeur de $\mathfrak{T}F$ devient ensuite

$$(2) \qquad \mathfrak{T}F=\frac{Fsx}{r}.$$

On peut remarquer qu'en a et a', $\mathfrak{T}F=0$, puisqu'en ces deux points $x=0$. Au point b, $\mathfrak{T}F$ prendra sa valeur maxima, savoir

$$(3) \qquad \mathfrak{T}F=Fs.$$

BRAS MOYEN DE LA MANIVELLE.

Recherchons maintenant sur quelle circonférence il faudrait faire agir tangentiellement la force F, *pour que le travail produit pendant une révolution, fût égal au travail effectif de la force motrice.*

y étant le rayon inconnu, on aura

$$F.2\pi y=F.2r,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad y=\frac{r}{\pi}.$$

Ce résultat fait voir que *le bras moyen de la manivelle à simple effet est égal à la moitié de la distance au point* O *du centre de gravité de la demi-circonférence décrite par le bouton de la manivelle.*

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE MOYEN.

n étant le nombre d'arcs s contenus dans la circonférence $aba'b'$, le travail moyen de la force motrice aura pour va-

leur

$$\mathfrak{T}'\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}.2r}{n}.$$

Mais

$$ns = 2\pi r, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{2\pi r}{s};$$

donc

$$(5) \qquad \mathfrak{T}'\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}s}{\pi}.$$

On peut juger maintenant combien est irrégulière l'action d'une manivelle à simple effet. Aux points a et a' le travail élémentaire est nul; au point b il est à son maximum, et cette valeur maxima s'écarte notablement du travail moyen. Pour mieux comparer les divers travaux, nous formerons le tableau ci-après :

$$\text{Travail minimum} = 0,$$

$$\text{Travail moyen...} = \frac{\mathrm{F}s}{\pi},$$

$$\text{Travail maximum} = \mathrm{F}s.$$

En rapportant ces divers travaux au travail moyen pris pour unité, on trouve

$$\text{Travail minimum} = 0,$$

$$\text{Travail moyen...} = 1,$$

$$\text{Travail maximum} = 3,1416.$$

POINTS DE VITESSE MINIMA ET MAXIMA.

Si l'on prend OP (*fig.* 99) *égale au bras moyen de la manivelle, et qu'au point* P *on élève la perpendiculaire* mm', *la plus petite vitesse du bouton de la manivelle aura lieu au point* m, *la plus grande au point* m'.

Soient p la distance à l'axe de rotation de la manivelle d'une molécule quelconque m qui tourne autour de cet axe; m', p' des quantités analogues relatives à une autre molécule m' tournant autour de l'axe O', et ainsi de suite : v et v_0, v' et v'_0 étant les vitesses absolues de ces molécules quand la manivelle est aux deux extrémités de l'arc infiniment petit s, on aura, en

vertu du principe des forces vives,

$$\frac{Fsx}{r} - Qs' = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\Sigma' m'(v'^2 - v_0'^2) + \ldots.$$

Mais $\frac{s'}{s} = \frac{r'}{r}$; donc

$$\frac{Fsx}{r} - Q\frac{sr'}{r} = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\Sigma' m'(v'^2 - v_0'^2) + \ldots.$$

Le signe Σ s'étend à toutes les molécules qui tournent aut de l'axe de la manivelle, le signe Σ' à toutes celles qui tourn autour de l'axe O', et ainsi de suite pour les autres axes de ro tions. Soient maintenant ω et ω_0 les vitesses angulaires aut de l'axe O, ω' et ω'_0 les quantités analogues relatives à l'axe et ainsi de suite; on aura

$$v = p\omega, \quad v_0 = p\omega_0, \quad v' = p'\omega', \quad v'_0 = p'\omega'_0 \ldots.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{Fsx}{r} - Q\frac{sr'}{r} = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\Sigma mp^2 + \frac{1}{2}(\omega'^2 - \omega_0'^2)\Sigma' m'p'^2 + \ldots$$

Posons enfin $O'B' = r_1$; alors, si l'on observe que la vites absolue du point B' est la même dans la roue ABA'B' que da la roue O', on pourra poser

$$r'\omega = r_1\omega', \quad r'\omega_0 = r_1\omega'_0,$$

et l'équation des forces vives prendra la forme

$$\frac{Fsx}{r} - Q\frac{sr'}{r} = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right).$$

Désignons par $\delta\omega_0$ la différence des vitesses ω et ω_0; si l'o néglige la puissance du second ordre par rapport à $\delta\omega_0$, o trouve

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\omega_0\delta\omega_0,$$

et par suite l'équation précédente devient

$$\frac{Fsx}{r} - Q\frac{sr'}{r} = \omega_0\delta\omega_0\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right);$$

d'où l'on tire, en supprimant les indices ${}_0$ qui sont maintenant inutiles,

$$(6)\qquad \delta\omega = \frac{\frac{Fsx}{r} - Q\frac{sr'}{r}}{\omega\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right)}.$$

Remarquons maintenant qu'au point a, le travail élémentaire de la force motrice F est nul; par conséquent en ce point $\delta\omega < 0$. A mesure que le bouton de la manivelle s'avance vers b, le terme $\frac{Fsx}{r}$ augmente, mais $\delta\omega$ reste négatif tant que

$$\frac{Fsx}{r} < \frac{Qsr'}{r};$$

donc la vitesse continue à décroître, et cette vitesse atteindra sa valeur minima au moment où l'on aura

$$\frac{Fsx}{r} = \frac{Qsr'}{r}.$$

Remplaçant Q par sa valeur (1), on trouve

$$x = \frac{r}{\pi}.$$

Prenons $OP = \frac{r}{\pi}$, et tirons la perpendiculaire mm'. Quand le bouton de la manivelle sera en m, celle-ci aura atteint sa moindre vitesse. A partir de ce moment, le travail moteur surpassant le travail résistant, $\delta\omega$ deviendra positif et la vitesse croîtra; de plus cet accroissement de vitesse continuera jusqu'à ce qu'on ait de nouveau

$$\frac{Fsx}{r} = \frac{Qsr'}{r}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{r}{\pi}.$$

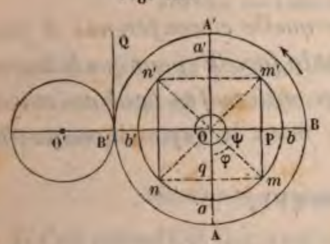
de là il suit que *la manivelle aura atteint sa plus grande vitesse au point m'*. A partir de ce moment $\delta\omega$ redeviendra négatif, et la vitesse décroîtra jusqu'au point m où elle atteindra de nouveau se valeur minima, et ainsi de suite.

MANIVELLE A DOUBLE EFFET.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE.

68. Soient toujours O (*fig.* 100) l'arbre que fait tourner la manivelle, et mm' la direction de la force motrice; la résistance au mouvement étant Q, on devra avoir, en adoptant les mêmes notations qu'au numéro précédent,

Fig. 100.



$$Q . 2\pi r' = 4 F r,$$

d'où

(1) $$Q = \frac{2 F r}{\pi r'}.$$

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE DE LA MANIVELLE.

Supposons le bouton en m et partageons encore en n parties égales infiniment petites la circonférence décrite par le bouton de la manivelle; s étant toujours l'une de ces divisions, le travail de la force motrice, pendant le parcours de l'arc s, aura toujours pour valeur

(2) $$\mathfrak{T} F = \frac{F s x}{r};$$

et l'on peut remarquer que le travail maximum répond aux points b et b' pour lesquels $x = r$, ce qui donne, comme précédemment, pour ce travail maximum,

(3) $$\mathfrak{T} F = F s.$$

Nommant aussi s' l'arc semblable à s décrit par le point pendant que la manivelle décrit l'arc s, le travail élémentaire résistant aura pour valeur

$$\mathfrak{T} Q = Q s';$$

et comme $\frac{s'}{s} = \frac{r'}{r}$, l'expression ci-dessus devient

$$\mathfrak{T} Q = Q \frac{s r'}{r};$$

remplaçant Q par sa valeur (1), on trouve

$$(4) \qquad \mathfrak{T}Q = 2\frac{Fs}{\pi}.$$

BRAS MOYEN DE LA MANIVELLE.

Recherchons maintenant sur quelle circonférence il faudrait faire agir tangentiellement la force F, *pour que le travail produit pendant une révolution entière fût égal au travail effectif de la force motrice.* y étant le rayon inconnu, on aura

$$F.2\pi y = 4Fr,$$

d'où l'on tire

$$(5) \qquad y = \frac{2}{\pi} r.$$

Ce qui fait voir que *le bras moyen d'une manivelle simple à double effet est égal à la distance au point* O, *du centre de gravité de la demi-circonférence décrite par le bouton de la manivelle.*

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE MOYEN.

n étant le nombre d'arcs s contenus dans la circonférence $aba'b'$, le travail moyen de la force motrice aura pour valeur

$$\mathfrak{T}'F = \frac{4Fr}{n}.$$

Mais

$$ns = 2\pi r, \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{2\pi r}{s};$$

donc

$$(6) \qquad \mathfrak{T}'F = \frac{2Fs}{\pi}.$$

L'action d'une manivelle à double effet est moins irrégulière que celle de la manivelle à simple effet; car on a

$$\text{Travail minimum} = 0,$$
$$\text{Travail moyen...} = \frac{2Fs}{\pi},$$
$$\text{Travail maximum} = Fs;$$

et, en prenant le travail moyen pour unité,

$$\text{Travail minimum} = 0,$$
$$\text{Travail moyen...} = 1,$$
$$\text{Travail maximum} = \frac{1}{2}\pi = 1{,}571.$$

Ce tableau fait voir que la différence entre le travail maximum et le travail moyen est moitié moins grande que pour la manivelle à simple effet.

POINTS DES VITESSES MAXIMA ET MINIMA.

Si l'on prend OP (fig. 100) *égale au bras moyen de la manivelle, et que l'on construise le rectangle* $mnm'n'$, *les sommets* m *et* n' *seront les points de vitesse minima, les sommets* m', n *les points de vitesse maxima.* En effet, si l'on adopte la même notation qu'au numéro précédent, on trouve d'abord

$$(7) \qquad \delta\omega = \frac{\frac{Fsx}{r} - Q\frac{sr'}{r}}{\omega\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right)}.$$

Or au point a le travail élémentaire de F est nul; donc

$$\delta\omega < 0.$$

A mesure que le bouton m s'élève vers b, le terme $\frac{Fsx}{r}$ augmente, mais $\delta\omega$ reste négatif tant que

$$\frac{Fsx}{r} < \frac{Qsr'}{r};$$

par conséquent, la vitesse continue à décroître, et elle atteindra sa valeur minima au moment où l'on aura

$$\frac{Fsx}{r} = \frac{Qsr'}{r}.$$

Remplaçant Q par sa valeur (1), on trouve

$$x = \frac{2}{\pi}r.$$

Par conséquent, la manivelle prendra sa moindre vitesse au point m. A partir de ce moment $\delta\omega$ deviendra positif, et la vitesse croîtra jusqu'à ce qu'on ait de nouveau

$$\frac{Fsx}{r} = \frac{Qsr'}{r}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2}{\pi}r.$$

Ainsi le point m' sera un point de vitesse maxima. Après, la vitesse décroîtra jusqu'en n', qui sera un nouveau point de vitesse minima, et ainsi de suite.

VITESSES DE LA MANIVELLE.

Si l'on nomme ω_0 la vitesse angulaire quand la manivelle est au point le plus bas a, et ω cette vitesse en un point quelconque m, on aura

$$F.aq - Qr'\varphi = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right),$$

l'angle φ étant compté dans le sens du mouvement de o à π. Remplaçant Q par sa valeur (1), et observant que $aq = r(1 - \cos\varphi)$, l'équation ci-dessus devient

$$Fr(1 - \cos\varphi) - \frac{2}{\pi}Fr\varphi = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right);$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2Fr\left(1 - \cos\varphi - \frac{2}{\pi}\varphi\right)}{\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots}.$$

Si dans cette égalité on fait $\varphi = \pi$, on aura la vitesse au point a', savoir $\omega = \omega_0$. La formule (8) servira à déterminer la vitesse de la manivelle au delà du point a', en y comptant l'angle φ à partir de Oa', toujours dans le sens du mouvement et entre les mêmes limites. De là il suit que la vitesse de la manivelle sera la même pour deux positions symétriques quelconques, relativement au centre O; par conséquent, *les deux vitesses minima sont égales, ainsi que les deux vitesses maxima.*

MANIVELLE DOUBLE A DOUBLE EFFET.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE.

69. Pour transmettre le mouvement d'un ou deux pistons à un arbre tournant OO′, on fait agir ceux-ci sur deux coudes (*fig.* 101) qui font corps avec l'arbre; ces deux coudes, dont l'ensemble constitue la manivelle double, sont ordinairement placés dans deux plans perpendiculaires. Pour étudier le mouvement d'une manivelle double, nous projetterons ses deux bras sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, comme on le voit dans la figure ci-après. Soient OM, OM′ (*fig.* 102) ces deux projections, O la projection de l'axe de rotation, et supposons d'abord que l'angle MOM′ soit quelconque. Menant le diamètre AA′ parallèle à la force motrice, et nommant toujours Q la résistance au mouvement, on devra avoir, en adoptant les mêmes notations que précédemment,

Fig. 101.

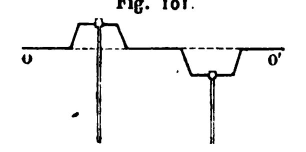
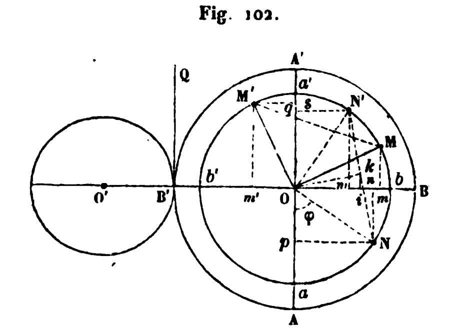


Fig. 102.



$$(1) \qquad Q.2\pi r' = 8Fr, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{4Fr}{\pi r'}.$$

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE DE LA MANIVELLE.

Cela posé, nous examinerons les deux cas où l'angle de la manivelle comprendra ou non le diamètre aa'.

Premier cas. Comme chaque bouton M et M′ est sollicité par la force F, les travaux élémentaires de ces deux forces auront respectivement pour valeurs $\frac{Fs}{r}Om$, $\frac{Fs}{r}Om'$; par suite

le travail de la force motrice totale sera

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{T}\, 2\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}s}{r}\, mm'.$$

Deuxième cas. Supposons que la manivelle ait la position NON′; les travaux élémentaires des forces F qui agissent sur ses deux bras seront $\frac{\mathrm{F}s}{r} \cdot \mathrm{O}n$, $\frac{\mathrm{F}s}{r} \cdot \mathrm{O}n'$. Si on les ajoute, on aura

$$\mathfrak{T}\, 2\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}s}{r}(\mathrm{O}n + \mathrm{O}n').$$

Du milieu k de la corde NN′ abaissons la perpendiculaire ki; les deux parties in et in' seront égales, attendu que ces deux lignes sont chacune la projection de la demi-corde NN′. De là il résulte

$$\mathrm{O}n = \mathrm{O}i + in,$$
$$\mathrm{O}n' = \mathrm{O}i - in'.$$

Ajoutant ces deux égalités membre à membre, on trouve

$$\mathrm{O}n + \mathrm{O}n' = 2\mathrm{O}i.$$

Substituant cette valeur dans celle de $\mathfrak{T}\, 2\mathrm{F}$, il vient

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{T}\, 2\mathrm{F} = 2\frac{\mathrm{F}s}{r}\mathrm{O}i.$$

Les équations (2) et (3) font voir qu'il y aura deux valeurs maxima du travail élémentaire de la force motrice. La première valeur aura lieu quand la corde MM′ de la manivelle sera perpendiculaire à la direction de la bielle, parce qu'alors la projection mm' sera égale à la corde elle-même, la seconde quand la corde NN′ sera parallèle à la bielle, parce qu'alors la projection Oi sera égale à Ok; il suit de là que les valeurs maxima de ces travaux seront, en nommant c la corde MM′:

Quand la manivelle a la position MOM′,

$$\text{(4)} \qquad \mathfrak{T}\, 2\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}s}{r}\, c;$$

Et quand elle a la position NON′

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{T}\, 2\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}s}{r}\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Si l'on prend le rapport de ces égalités, on a

$$(6) \qquad \frac{1^{\text{er}}\ \text{travail}}{2^{\text{e}}\ \text{travail}} = \frac{c}{\sqrt{4r^2 - c^2}}.$$

Or, si l'on choisit c très-petit, le rapport ci-dessus sera très-petit, et la différence des deux travaux relativement très-grande. De même, si la corde c est très-grande, le dénominateur sera très-petit, le rapport des deux travaux sera très-grand, et leur différence relativement très-grande. Donc le mouvement d'une telle manivelle sera excessivement irrégulier. Pour éviter un si grave inconvénient, il faut choisir une manivelle dont la corde rende égaux les travaux ci-dessus. On trouve de la sorte

$$c = r\sqrt{2};$$

ce qui prouve que *les deux bras de la manivelle doivent être dans deux plans rectangulaires*. On a ensuite pour la valeur maxima du travail

$$(7) \qquad \text{𝔗}\, 2\text{F} = \text{F}s\sqrt{2}.$$

Si l'on introduit la condition précédente dans les formules (2) et (3) qui donnent les valeurs générales du travail élémentaire, on a, en nommant i l'inclinaison de la corde sur le diamètre perpendiculaire à la bielle,

$$mm' = r\cos i\sqrt{2}, \quad \text{O}i = \frac{1}{2} r\sin i\sqrt{2},$$

et, par suite,

$$(8) \qquad \text{𝔗}\, 2\text{F} = \text{F}s\cos i\sqrt{2},$$

$$(9) \qquad \text{𝔗}\, 2\text{F} = \text{F}s\sin i\sqrt{2}.$$

Mais il doit être entendu que l'angle i n'est pas généralement le même dans ces deux formules. La première convient au cas où la corde de la manivelle coupe le diamètre parallèle à la bielle, la deuxième au cas où cette corde coupe le diamètre perpendiculaire. Dans le cas de l'équation (8), la plus grande valeur de i répond à $i = 45°$; dans le cas de l'équation (9), la plus petite valeur de i est $i = 45°$. Donc chacune de ces équa-

tions donnera la même valeur minima du travail élémentaire, savoir :

(10) $$\mathcal{E}2F = Fs.$$

Les formules (2) et (3) conduiraient au même résultat.

En résumé, *le travail élémentaire moteur prendra sa valeur maxima toutes les fois que la corde de la manivelle sera parallèle ou perpendiculaire à la bielle. Il prendra sa valeur minima toutes les fois que la corde fera avec la bielle un angle de 45 degrés.*

Pendant que le bouton de l'un des bras de la manivelle parcourt l'arc infiniment petit s, le point B' décrit un arc semblable s', et l'on a

$$\frac{s'}{s} = \frac{r'}{r}, \quad \text{d'où} \quad s' = \frac{sr'}{r}.$$

Mais le travail élémentaire de Q a pour valeur $\mathcal{E}Q = Qs'$, donc aussi

(11) $$\mathcal{E}Q = \frac{Qsr'}{r}.$$

BRAS MOYEN DE LA MANIVELLE.

Recherchons maintenant sur quelle circonférence il faudrait faire agir tangentiellement la force 2F, *pour que le travail produit pendant une révolution entière fût égal au travail effectif de la force motrice.* y étant le rayon inconnu, on aura

$$2F.2\pi y = 8Fr,$$

de là on tire

(12) $$y = \frac{2}{\pi}r,$$

ce qui est le même résultat que pour la manivelle simple et à double effet.

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE MOYEN.

n étant le nombre d'arcs s contenus dans la circonférence que décrit le bouton la manivelle, le travail moyen de la force

motrice aura pour valeur

$$\mathfrak{C}'F = \frac{8Fr}{n}.$$

Mais

$$ns = 2\pi r, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{2\pi r}{s};$$

donc

$$(13) \qquad \mathfrak{C}'F = \frac{4}{\pi} Fs.$$

L'action d'une manivelle double et à double effet est moins irrégulière que celle d'une manivelle simple à double effet, car on a

Travail minimum.... $= Fs$,

Travail moyen...... $= \frac{4}{\pi} Fs$,

Travail maximum... $= \sqrt{2}.Fs$;

ou, si l'on prend le travail moyen pour unité,

Travail minimum... $= 0,7854$,

Travail moyen..... $= 1$,

Travail maximum... $= 1,2732$.

On voit que les différences de ces travaux, pris consécutivement, sont 0,2146 et 0,2732, lesquelles ne diffèrent que dans les unités de l'ordre des centièmes.

POINTS DES VITESSES MAXIMA ET MINIMA.

En adoptant les mêmes notations que précédemment, on aura comme pour les manivelles simples, et en considérant la position pour laquelle la corde coupe le diamètre aa',

$$(14) \qquad \delta\omega = \frac{Fs \cos i \sqrt{2} - \frac{4}{\pi} Fs}{\omega \left(\Sigma m p^2 + \frac{r'^2}{r_1^2} \Sigma' m' p'^2 + \ldots \right)}.$$

Remarquons maintenant que lorsque la manivelle a la position bOa', le travail moteur prend sa valeur minima; et

comme alors $\cos i = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la valeur précédente de $\partial\omega$ devient négative. A mesure que le bouton b s'avance vers a', le terme $\mathrm{F}s \cos i \sqrt{2}$ augmente, mais $\partial\omega$ reste négatif tant que

$$\mathrm{F}s \cos i \sqrt{2} < \frac{4}{\pi} \mathrm{F}s;$$

donc la vitesse continue à décroître, et elle atteindra sa valeur minima, au moment où l'on aura

$$\mathrm{F}s \cos i \sqrt{2} = \frac{4}{\pi} \mathrm{F}s,$$

ce qui donne

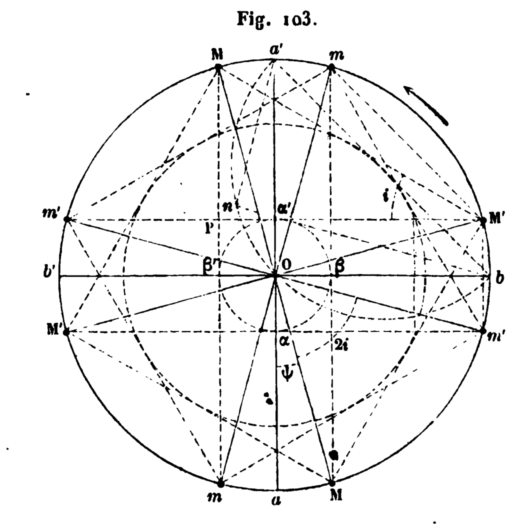
$$\cos i = \frac{2}{\pi}\sqrt{2}, \quad \text{d'où} \quad i = 25^\circ\, 48'\, 1'',2.$$

Multipliant de part et d'autre par $r\sqrt{2}$, le premier membre devient la projection de la corde sur le diamètre bb', et l'on a

$$(15) \qquad r \cos i \sqrt{2} = \frac{4}{\pi} r.$$

Pour assigner sur la figure la position de la manivelle, je tire

Fig. 103.



la corde ba', puis je décris sur cette corde la demi-circonfé-

rence bna'; je prends la corde $bn = \frac{4}{\pi} r$, et je trace du centre O une circonférence tangente à la corde bn; en menant à cette circonférence une tangente $M'm'$ parallèle à bb', la projection $M'P$ sera égale à bn; par conséquent on aura la position M' de l'un des boutons de la manivelle, laquelle prendra ainsi la position $M'OM$; le point M' sera donc un point de vitesse minima. La manivelle continuant à s'avancer, le travail moteur devient croissant, et il continuera à croître jusqu'à ce que la corde $M'M$ soit devenue parallèle à bb'; à partir de ce moment, le travail commencera à décroître, mais la vitesse sera toujours croissante, puisque $\delta\omega$ reste positif, et il en sera ainsi jusqu'à ce qu'on aura de nouveau

$$\cos i = \frac{2}{\pi} \sqrt{2}.$$

Alors la manivelle prendra la position mOm', et le point m sera un point de vitesse maxima. Le bouton m continuant à s'avancer et le travail moteur étant moindre maintenant que le travail résistant, $\delta\omega$ sera négatif; de là il résulte que la vitesse de la manivelle sera décroissante. Quand le bouton sera parvenu en a', le travail moteur aura repris sa valeur minima Fs. Mais à partir de ce moment, et pendant tout le temps que la corde de la manivelle sera à gauche de aa', la valeur de $\delta\omega$ sera donnée par la formule

$$(16) \qquad \delta\omega = \frac{Fs \sin i \sqrt{2} - \frac{4}{\pi} Fs}{\omega\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right)}.$$

Or $Fs \sin i \sqrt{2}$ continuant à croître, $\delta\omega$ restera négatif tant que $Fs \sin i \sqrt{2} < \frac{4}{\pi} Fs$; par conséquent, la vitesse ira toujours en décroissant; elle atteindra sa valeur minima quand on aura

$$\sin i = \frac{2}{\pi} \sqrt{2}$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $r\sqrt{2}$, il vient

$$(17) \qquad r \sin i \sqrt{2} = \frac{4}{\pi} r.$$

Or le premier membre de cette égalité est la projection de la corde sur le diamètre aa'; donc, en menant par le point β' la tangente Mm, on déterminera un nouveau point M de vitesse minima. En poursuivant cette discussion, on reconnaîtra que *les points marqués de la lettre m accentuée ou non sont des points de vitesse maxima; ceux marqués de la lettre* M *accentuée ou non, des points de vitesse minima.* On peut remarquer que les angles tels que $\psi = a$OM ont chacun pour valeur

$$(18) \qquad \psi = 45^\circ - i = 19^\circ\, 11'\, 58'',8,$$

i étant donné par la formule

$$\cos i = \frac{2}{\pi}\sqrt{2}.$$

VITESSES DE LA MANIVELLE.

Supposons que la manivelle tourne dans le sens indiqué par la flèche (*fig* 102), et considérons le mouvement du bras N qui marche en arrière. Nommant φ l'angle aON lequel sera compté de 0° à 180°, nous aurons pour le travail de F pendant que le bouton N parcourt l'arc aN,

$$\mathfrak{T}\text{F} = \text{F}.ap = \text{F}r(1 - \cos\varphi).$$

Mais quand le premier bouton N était en a, le deuxième N' était en b, donc le travail de F relatif au deuxième bouton aura pour valeur

$$\mathfrak{T}\text{F} = \text{F}.\text{O}q = \text{F}r\sin\varphi.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\mathfrak{T}\,2\text{F} = \text{F}r(1 + \sin\varphi - \cos\varphi).$$

Quant au travail résistant, il a pour expression

$$\mathfrak{T}\text{Q} = \text{Q}r'\varphi = \frac{4}{\pi}\varphi\text{F}r.$$

Désignons maintenant par ω_0 la vitesse angulaire autour de l'axe O, et quand le bouton N est au point a; ω étant la vitesse angulaire quand le bras de la manivelle est en un point quelconque N, on aura, en vertu du principe des forces vives,

$$\mathrm{F}r(1+\sin\varphi-\cos\varphi)-\frac{4}{\pi}\varphi\mathrm{F}r$$
$$=(\omega^2-\omega_0^2)\left(\Sigma mp^2+\frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2+\ldots\right).$$

Résolvant cette équation par rapport à ω, on trouve

(19) $$\omega^2=\omega_0^2+\frac{2\mathrm{F}r\left(1+\sin\varphi-\cos\varphi-\frac{4}{\pi}\varphi\right)}{\left(\Sigma mp^2+\frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2+\ldots\right)}.$$

Supposons maintenant que la manivelle occupe la position MOM'; le travaux de la force motrice seront

$$\mathfrak{S}\mathrm{F}=\mathrm{F}r(1-\cos\varphi),$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{F}=\mathrm{F}r(2-\sin\varphi),$$

suivant que l'on considère le bouton M ou le bouton M'. Ajoutant ces relations membre à membre, on trouve

$$\mathfrak{S}\,2\mathrm{F}=\mathrm{F}r(3-\sin\varphi-\cos\varphi).$$

Mais le travail résistant a pour valeur

$$\mathfrak{S}\mathrm{Q}=\frac{4}{\pi}\varphi\mathrm{F}r;$$

donc

$$\mathrm{F}r\left(3-\sin\varphi-\cos\varphi-\frac{4}{\pi}\varphi\right)=\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_0^2)\left(\Sigma mp^2+\frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2+\ldots\right).$$

Résolvant cette équation par rapport à ω, on trouve

(20) $$\omega^2=\omega_0^2+\frac{2\mathrm{F}r\left(3-\sin\varphi-\cos\varphi-\frac{4}{\pi}\varphi\right)}{\Sigma mp^2+\frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2+\ldots}.$$

L'équation (19) convient au cas où la corde de la manivelle

coupe le diamètre bb'; la formule (20) au cas où elle coupe le diamètre aa'.

Si l'on veut avoir la vitesse du bouton quand il décrit la demi-circonférence $a'b'a$, il suffira de prendre pour ω_0 la vitesse au point a', en comptant l'angle φ ci-dessus à partir de Oa', et toujours dans le sens du mouvement.

Pour avoir la vitesse au point b, on posera

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi,$$

et chacune des formules ci-dessus donnera

$$\omega = \omega_0.$$

Si l'on fait $\varphi = \pi$ dans la formule (20), on trouve également

$$\omega = \omega_0.$$

Au point b' on aurait de même

$$\omega = \omega_0.$$

Ainsi *les quatre extrémités des deux diamètres qui sont parallèles et perpendiculaires à la bielle, sont les points de vitesse moyenne.*

Recherchons maintenant si la vitesse de la manivelle est la même aux points de vitesse maxima et minima.

Pour le point M (*fig.* 103), nous avons

$$\varphi = \frac{1}{4}\pi - i;$$

substituant cette valeur dans la formule (19), elle donne

$$(21) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2Fr\left(\sin i\sqrt{2} - \frac{4}{\pi}i\right)}{\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots}.$$

Au point M', nous aurons

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi - i,$$

et comme ici la corde de la manivelle coupe le diamètre aa',

il faudra substituer cette valeur de φ dans l'équation (20). Ce qui donne encore le même résultat, et ainsi de suite pour les autres points de vitesse minima. Ainsi *la vitesse de la manivelle est la même en chacun des points de vitesse minima.*

Considérons encore les points de vitesse maxima en commençant par le point m'. Ici nous avons

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi - \left(\frac{1}{4}\pi - i\right);$$

substituant cette valeur dans la formule (19), on trouve

$$(22) \qquad \omega'^2 = \omega_0^2 + \frac{2Fr\left(\sin i\sqrt{2} - \frac{4}{\pi}i\right)}{\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots}.$$

Relativement au point m, on aura

$$\varphi = \pi - \left(\frac{1}{4}\pi - i\right);$$

substituant cette valeur dans l'équation (20), on retrouve la valeur ci-dessus, et ainsi de suite. Donc aussi *la vitesse de la manivelle est la même en chacun des points de vitesse maxima.* On voit par la discussion précédente que, pendant chaque révolution, *la manivelle passe quatre fois par chacune des vitesses moyenne, minima et maxima.*

Si l'on retranche l'équation (21) de l'équation (22), et qu'ensuite on fasse disparaître le dénominateur, on trouve

$$(23) \qquad (\omega'^2 - \omega^2)\left(\Sigma mp^2 + \frac{r'^2}{r_1^2}\Sigma' m'p'^2 + \ldots\right) = 4Fr\left(\sin i\sqrt{2} - \frac{4}{\pi}i\right),$$

ce qui est la valeur de l'accroissement de la force vive du système matériel, pendant que celui-ci passe de sa plus petite à sa plus grande vitesse.

Les quantités telles que Σmp^2 qui entrent dans les formules des manivelles sont appelées *moments d'inertie.* De sorte que *le moment d'inertie d'un corps est la somme des masses de ses molécules, multipliées respectivement par les carrés de*

leurs distances à un axe donné. La détermination des moments d'inertie est généralement un problème de calcul intégral.

POIDS DES VOLANTS.

70. *Un volant est une roue massive d'un grand diamètre, montée le plus souvent sur l'arbre de la manivelle, et destinée à régulariser l'action de celle-ci.* Nous supposons que le régulateur ordinaire de la force motrice assure à la machine un mouvement périodiquement uniforme, et il s'agit de renfermer entre des limites données les variations extrêmes de la vitesse de la manivelle. Pour cela, reprenons l'équation des forces vives

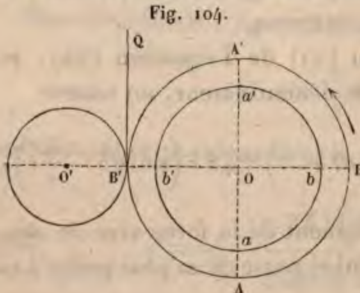
$$T_m - T_r = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2).$$

Nous décomposerons toujours le second membre en autant de sommes qu'il y a d'axes de rotations, chaque somme devant s'étendre aux molécules de toutes les pièces qui tournent autour de cet axe, et nous aurons

$$T_m - T_r = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\Sigma' m'(v'^2 - v_0'^2) + \ldots.$$

p étant encore la distance à l'axe O (*fig.* 104) d'une molécule quelconque m, p' et m' des quantités analogues relatives à l'axe O′, et ainsi de suite; nous aurons, en nommant ω, ω', etc., les vitesses angulaires autour de chaque axe,

Fig. 104.



$$v = p\omega, \quad v_0 = p\omega_0,$$
$$v' = p'\omega', \quad v_0' = p'\omega_0', \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation des forces vives, elle devient

$$T_m - T_r = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\Sigma mp^2 + \frac{1}{2}(\omega'^2 - \omega_0'^2)\Sigma' m'p'^2 + \ldots.$$

Posons

$$OB = r, \quad O'B' = r_1;$$

on aura, à cause qu'au point B' la vitesse absolue est la même pour les deux roues,

$$\omega' r_1 = \omega r, \quad \omega'_0 r_1 = \omega_0 r, \ldots,$$

par suite, l'équation des forces vives devient

$$(1) \quad T_m - T_r = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\,\Sigma mp^2 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2}(\omega^2 - \omega_0^2)\,\Sigma' m' p'^2 + \ldots.$$

Nous prendrons pour ω, ω_0 les vitesses maxima et minima de la manivelle. De l'équation ci-dessus on tire

$$\omega - \omega_0 = \frac{2(T_m - T_r)}{(\omega + \omega_0)\left(\Sigma mp^2 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2}\Sigma' m' p'^2 + \ldots\right)},$$

d'où l'on conclut que *la différence des vitesses maxima et minima sera d'autant plus petite, que ces vitesses seront plus grandes et que la machine sera plus lourde.*

Maintenant nous examinerons les deux cas où le volant sera monté sur l'axe O de la manivelle ou sur un axe latéral O'.

Premier cas. Si l'on résout l'équation (1) par rapport à Σmp^2, on trouve

$$\Sigma mp^2 = \frac{2(T_m - T_r)}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{r^2}{r_1^2}\Sigma' m' p'^2 - \ldots.$$

Soient Ω la vitesse de régime, et n un coefficient de régularité; on posera

$$\omega = \Omega\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \omega_0 = \Omega\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{4\Omega^2}{n};$$

et la formule précédente deviendra

$$(2) \quad \Sigma mp^2 = \frac{n(T_m - T_r)}{2\Omega^2} - \frac{r^2}{r_1^2}\Sigma' m' p'^2 - \ldots.$$

Soit N le nombre de tours que la manivelle fait en une minute,

on aura

$$\Omega.60 = 2\pi N, \quad \text{d'où} \quad \Omega = \frac{\pi N}{30},$$

par suite, la formule (2) devient

$$(3) \qquad \Sigma mp^2 = \frac{450\, n\,(T_m - T_r)}{\pi^2 N^2} - \frac{r^2}{r_1^2}\Sigma' m' p'^2 - \ldots.$$

Or on verra plus loin (nº 72, formule 23) que le moment d'inertie d'un anneau cylindrique, dont le rayon moyen est R, et dont la jante a pour largeur e (dans le sens du rayon), est donné par la formule

$$A_g = \frac{P}{g}\left(R^2 + \frac{e^2}{4}\right),$$

dans laquelle P est le poids de la jante; donc

$$(4) \qquad \Sigma mp^2 = \frac{P}{g}\left(R^2 + \frac{e^2}{4}\right) + k^2,$$

en nommant k^2 la somme des moments d'inertie du moyeu du volant et de ses bras, ainsi que des autres pièces qui tournent autour de l'axe de la manivelle. Substituant cette valeur dans la formule (3), elle devient

$$\frac{P}{g}\left(R^2 + \frac{e^2}{4}\right) + k^2 = \frac{450\, n\,(T_m - T_r)}{\pi^2 N^2} - \frac{r^2}{r_1^2}\Sigma' m' p'^2 - \ldots,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{450\, ng\,(T_m - T_r)}{\pi^2 N^2\left(R^2 + \frac{1}{4}e^2\right)} - g\,\frac{k^2 + \frac{r^2}{r_1^2}\Sigma' m' p'^2 - \ldots}{R^2 + \frac{e}{4}}.$$

Si l'on néglige le second terme de cette formule, on aura pour P une valeur plus grande que celle qui est nécessaire pour régulariser l'action de la manivelle; par conséquent le but qu'on se propose sera atteint à fortiori. On peut donc prendre pour la formule générale des volants, quand ils sont montés sur l'arbre de la manivelle,

$$(5) \qquad P = \frac{450\, ng\,(T_m - T_r)}{\pi^2 N^2\left(R^2 + \frac{1}{4}e^2\right)}.$$

DEUXIÈME CAS. Si le volant est monté sur l'axe O', le terme le plus considérable du deuxième membre de l'équation (1) est le second terme. En résolvant cette équation par rapport à $\Sigma' m' p'^2$, et procédant comme dans le premier cas, on trouve

$$(6) \qquad P = \frac{450\, ng\,(T_m - T_r)}{\pi^2 N^2 \left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right)} \frac{r_1^2}{r^2}.$$

Les formules (5) et (6) montrent que *le poids du volant est en raison inverse du carré du nombre de tours que fait la manivelle en un temps donné, et aussi à très-peu près en raison inverse du carré de son diamètre. Quand le volant est monté sur un axe latéral à celui de la manivelle, ce poids est encore proportionnel au carré du rapport des rayons des roues de transmission, le rayon de la première roue étant pris pour terme de comparaison.*

POIDS DES VOLANTS RELATIFS AUX TROIS ESPÈCES DE MANIVELLES.

71. Nous avons d'abord dans le cas de la manivelle à simple effet (*fig.* 99)

$$T_m = F.mm', \qquad T_r = \frac{2}{\pi} F r \psi;$$

et ensuite

$$OP = \frac{r}{\pi} = (0,3183)\, r,$$

$$MP = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{\pi^2}} = (0,9479)\, r,$$

$$\psi = 71°26'18'',$$

et

$$2\psi = 2,49366;$$

au moyen de ces valeurs T_m et T_r deviennent

$$T_m = F r (1,8958),$$

$$T_r = F r (0,7937),$$

d'où

$$T_m - T_r = F r (1,1021).$$

Substituant dans la formule (5) du numéro précédent, on trouve

$$P = \frac{450\, ng\, (1,1021)\, F r}{\pi^2 N^2 \left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right)}.$$

Soit C la force de la machine en chevaux, on aura

$$F.2r.N = C \times 4500;$$

de là on tire

$$Fr = \frac{2250\ C}{N}.$$

Substituant cette valeur dans P, on obtient, après tous calculs faits, et pour un volant monté sur l'arbre de la manivelle,

$$(1) \qquad P = 1109013 \frac{nC}{N^3 \left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right)}.$$

Dans le cas d'un volant monté sur un axe latéral, la formule (6) du n° 69 donne évidemment

$$(2) \qquad P = 1109013 \frac{nC}{N^3 \left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right)} \frac{r_1^2}{r^2}.$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$R = 3^m, \quad e = 0^m,26, \quad N = 16, \quad N = 30, \quad C = 40, \quad \frac{r_1}{r} = \frac{1}{3},$$

on trouve, par la formule (1),

$$P = 3583^{1kil},$$

et par la formule (2),

$$P = 398^{1kil}.$$

Cherchons, de même, le poids du volant quand il doit régulariser une manivelle simple et à double effet.

Nous avons dans ce cas (*fig.* 100)

$$T_m = F.mm', \qquad T_r = \frac{4}{\pi} F r.\psi.$$

Mais dans la manivelle à double effet,

$$OP = \frac{2}{\pi} r = (0,6366)\, r, \quad mP = (0,7711)\, r, \quad mm' = (1,54$$

$$\psi = 50^{\circ}\, 27'\, 28'', \qquad 2\psi = 1,76131;$$

par suite, les valeurs de T_m et de T_r deviennent

$$T_m = Fr(1,5422), \qquad T_r = Fr(1,1213),$$

d'où

$$T_m - T_r = Fr(0,4209).$$

Substituant cette valeur dans la formule (5) du numéro p dent, on trouve, après tous calculs faits, et pour un v monté sur l'arbre de la manivelle,

$$(3) \qquad P = 211770 \frac{nC}{N^3\left(R^2 + \frac{e^2}{4}\right)}.$$

Dans le cas d'un volant monté sur un axe latéral, la mule (6) du n° 69 donne évidemment

$$(4) \qquad P = 211770 \frac{nC}{N^3\left(R^2 + \frac{e^2}{4}\right)} \frac{r_1^2}{r^2}.$$

Si l'on suppose, comme plus haut,

$$R = 3^{m}, \quad e = 0^{m},26, \quad N = 16, \quad n = 30, \quad C = 40, \quad \frac{r_1}{r} =$$

on trouve, par la formule (3),

$$P = 6842^{kil},$$

et par la formule (4),

$$P = 760^{kil}.$$

Cherchons de même le poids du volant quand il doit ré lariser une manivelle double et à double effet.

En vertu de la formule (23) du n° 68,

$$T_m - T_r = 2\,Fr\left(\sin i\sqrt{2} - \frac{4}{\pi} i\right);$$

au moyen de cette valeur, la formule (5) du numéro précé donne

$$P = \frac{900\, g\left(\sin i\sqrt{2} - \frac{4}{\pi} i\right) Fr}{\pi^2} \cdot \frac{n}{N^2\left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right)}.$$

Mais dans ce cas

$$Fr = (562,5)\frac{C}{N};$$

donc

$$P = \frac{90 \times 5625\, g\left(\sin i\sqrt{2} - \frac{4}{\pi}i\right)}{\pi^2} \cdot \frac{NC}{N^3\left(R^2 + \frac{1}{4}e^2\right)}.$$

Effectuant les calculs, on obtient enfin, pour le cas d'un volant monté sur l'arbre de la manivelle,

$$(5) \qquad P = (21220,3)\frac{nC}{N^3\left(R^2 + \frac{1}{4}e^2\right)}.$$

Dans le cas d'un volant monté sur un axe latéral, la formule (6) du n° 69 donne évidemment

$$(6) \qquad P = (21220,3)\frac{nC}{N^3\left(R^2 + \frac{1}{4}e^2\right)}\frac{r_1^2}{r^2}.$$

Si l'on prend encore

$$R = 3^m, \quad e = 0^m,26, \quad N = 16, \quad n = 30, \quad C = 40, \quad \frac{r_1}{r} = \frac{1}{3},$$

la formule (5) donne

$$P = 685^{kil},6.$$

On trouve ensuite, par la formule (6)

$$P = 76^{kil},$$

de sorte que le volant ne pourrait comporter le diamètre ci-dessus.

On voit par ces exemples combien les résultats sont différents, suivant le genre de manivelle, et aussi suivant que le volant est monté sur l'arbre de celle-ci ou sur un arbre latéral.

DÉTERMINATION DE L'ÉPAISSEUR DE LA JANTE DU VOLANT.

La largeur e de la jante étant connue, ainsi que le rayon moyen et le poids, on peut facilement déterminer son épaisseur ε (suivant l'axe). Pour cela, soient r et r' les rayons de la

surface intérieure et extérieure de la jante, D le poids d'un mètre cube de sa matière, et l'on aura

$$P = \pi D (r'^2 - r^2)\varepsilon.$$

Mais R étant le rayon moyen,

$$r' = R + \frac{1}{2}e,$$

$$r = R - \frac{1}{2}e,$$

d'où l'on tire

$$r'^2 - r^2 = 2Re.$$

Par suite, la valeur de P devient

$$P = 2\pi DR e \varepsilon;$$

laquelle, étant résolue par rapport à ε, donne

$$(7) \qquad \varepsilon = \frac{P}{2\pi DR e}.$$

Si, par exemple, le volant est en fonte,

$$D = 7207^{kil}.$$

Alors si l'on prend comme précédemment, $R = 3^m$, $e = 0^m,26$, et qu'on adopte pour P la valeur $P = 6842^{kil}$ relative à la manivelle simple et à double effet, on trouve

$$\varepsilon = 0^m,194.$$

REMARQUE GÉNÉRALE.

Dans la théorie qui précède, nous avons supposé la résistance constante. Mais il n'en est pas toujours ainsi, comme par exemple dans les laminoirs. Dans ce cas, il faudra recourir aux formules générales (5) ou (6) du n° 69, après avoir, dans chaque cas particulier, déterminé ou estimé $T_m - T_r$, qui répond aux variations extrêmes de la vitesse.



DIX-NEUVIÈME LEÇON.

DES MOMENTS D'INERTIE.

72. Les moments d'inertie, comme les centres de gravité, sont particulièrement du ressort du calcul intégral. Cependant quelques-uns peuvent s'obtenir par des procédés élémentaires, ainsi qu'on le verra ci-après.

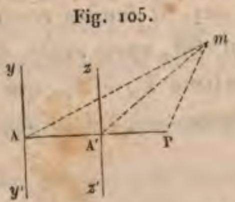
DÉFINITION DES MOMENTS D'INERTIE.

Concevons un système matériel quelconque, et une droite ou axe ayant une position et une direction arbitraires ; que de chaque molécule du système on abaisse une perpendiculaire sur cette droite, qu'on multiplie la masse de chaque molécule par le carré de sa distance à l'axe, qu'on fasse la somme de tous ces produits, *cette somme sera le moment d'inertie du système relativement à l'axe donné.*

RELATION ENTRE LES MOMENTS D'INERTIE RELATIFS A DEUX AXES PARALLÈLES.

Quand on connaît le moment d'inertie d'un corps (généralement d'un système matériel) relativement à un axe passant par le centre de gravité, on obtient le moment d'inertie du même corps, par rapport à un autre axe parallèle au premier, en ajoutant au moment d'inertie donné, le produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.

Fig. 105.



Soient yy' et zz' (*fig.* 105) deux axes parallèles, dont l'un yy' passe par le centre de gravité du corps ; concevons un plan mené suivant les deux axes, puis d'une molécule quelconque m abaissons sur ce plan la perpendiculaire mP ; enfin, du point P menons sur les deux

axes une perpendiculaire commune. En vertu du théorème des trois perpendiculaires, les lignes MA, MA' seront perpendiculaires sur les axes. Enfin posons, pour abréger,

$$mA = p, \quad mA' = q, \quad AA' = k, \quad AP = x.$$

Cela posé, le triangle mAA' donne

$$\overline{mA'}^2 = \overline{mA}^2 + \overline{AA'}^2 - 2\, mA . AA' . \cos A.$$

Mais

$$AP = mA . \cos A;$$

donc

$$q^2 = p^2 + k^2 - 2kx. \tag{1}$$

On peut remarquer que si le point P tombait à gauche de yy', l'angle A serait obtus et la quantité x deviendrait négative; par conséquent l'égalité (1) a une généralité complète, si l'on a égard au signe de x. Multipliant les deux membres de cette égalité par m, il vient

$$mq^2 = mp^2 + mk^2 - 2mkx;$$

pour une autre molécule, on aurait pareillement

$$m'q'^2 = m'p'^2 + m'k^2 - 2km'x',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite. Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, il vient

$$mq^2 + m'q'^2 + \ldots = mp^2 + m'p'^2 + \ldots + k^2(m + m' + \ldots)$$
$$- 2k(mx + m'x' + \ldots).$$

Mais $mx + m'x' + \ldots$ est la somme des moments des points matériels du corps par rapport à un plan mené suivant yy', perpendiculaire au plan des deux axes; par conséquent cette somme est nulle, puisque le plan yy' passe par le centre de gravité; donc on a simplement

$$mq^2 + m'q'^2 + \ldots = mp^2 + m'p'^2 + \ldots + Mk^2,$$

en posant, pour abréger,

$$M = m + m' + m'' + \ldots$$

Mais $mq^2 + m'q'^2 + \ldots$ et $mp^2 + m'p'^2 + \ldots$ sont les moments d'inertie par rapport aux axes zz', yy'; nommant A et A_g ces deux moments, on obtient enfin

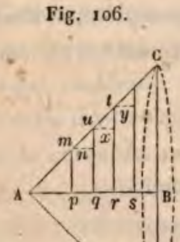
$$(2) \qquad A = A_g + Mk^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Réciproquement, cette égalité fera connaître le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité, quand on connaîtra le moment d'inertie par rapport à un axe qui lui sera parallèle; pour cela, il suffira de retrancher Mk^2 du moment d'inertie donné.

MOMENT D'INERTIE D'UN FILET MATÉRIEL RECTILIGNE.

Soit AB (*fig.* 106) un filet matériel homogène dont on veut trouver le moment d'inertie par rapport à un axe mené par le point A perpendiculaire à AB; pour cela, je partage AB en parties infiniment petites pq, qr, rs, ..., lesquelles auront pour masses $\mu.pq$, $\mu.qr$, $\mu.rs$, ..., μ étant la masse sous l'unité de longueur. Multipliant ces masses élémentaires :

Fig. 106.



La première par $\overline{Ap}^2$,
La deuxième par $\overline{Aq}^2$,
La troisième par $\overline{Ar}^2$,
. . . .

puis faisant la somme, on aura le moment d'inertie de AB, savoir :

$$A = \mu.pq.\overline{Ap}^2 + \mu.qr.\overline{Aq}^2 + \mu.rs.\overline{Ar}^2 + \ldots.$$

Maintenant j'élève au point B la perpendiculaire BC = AB; il s'ensuivra

$$pm = Ap, \quad qu = Aq, \quad rt = Ar, \ldots,$$

et le moment d'inertie deviendra

$$A = \mu.pq.\overline{mp}^2 + \mu.qr.\overline{uq}^2 + \mu.rs.\overline{tr}^2 + \ldots.$$

J'écris μ en facteur commun, puis je multiplie et je divise par π (rapport de la circonférence au diamètre), ce qui

donne

$$A = \frac{\mu}{\pi}\left(pq.\pi.\overline{mp}^2 + qr.\pi.\overline{uq}^2 + rs.\pi.\overline{tr}^2 + \ldots\right).$$

Mais $pq.\pi.\overline{mp}^2$, $qr.\pi.\overline{uq}^2$, etc., sont les volumes des cy dres engendrés par les rectangles infiniment petits *mı uxqr*, *tyrs*,..., tournant autour de l'axe AB; donc leur soı sera égale au volume du cône engendré par le triangle rec gle ABC. Posant AB = BC = l, on aura donc

$$A = \frac{\mu}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\pi l^2.l.$$

Réduisant, et nommant M la masse de AB, il vient enfin

(3) $$A = \frac{1}{3}Ml^2.$$

Si l'on veut avoir le moment d'inertie relativement centre de gravité du filet, il suffira de diminuer le résultat dessus de la quantité $M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}Ml^2$, et l'on aura

(4) $$A_g = \frac{1}{12}Ml^2.$$

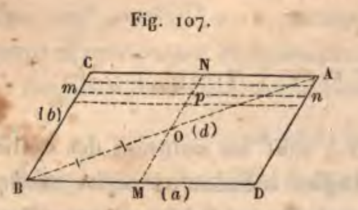
Dans la suite M désignera toujours la masse totale, et A_g moment d'inertie par rapport à un axe mené par le centre gravité; A sera le moment d'inertie par rapport à un axe rallèle au premier.

Si l'on remplace M par l dans les formules (3) et (4), moment d'inertie correspondant deviendra le moment d'in tie de la ligne. On peut aussi supposer que M représente surface d'un parallélogramme infiniment petit.

MOMENT D'INERTIE D'UNE TRANCHE PARALLÉLOGRAMMIQUE INFINIMENT MINCE.

Soit une tranche matérielle, homogène et infiniment min ayant la forme d'un parallélogramme (*fig.* 107); il s'agit déterminer son moment d'inertie par rapport à un axe pe

Fig. 107.



pendiculaire au plan de la figure et mené par le centre O de gravité. Pour cela, je décompose le parallélogramme en filets rectilignes parallèles au côté a, et soit mn l'un de ces filets; son moment d'inertie par rapport à un axe qui se projette en son milieu p sera, en nommant m sa masse, $\frac{1}{12}ma^2$. Relativement à l'axe O, ce moment d'inertie deviendra

$$\frac{1}{12}ma^2 + m.\overline{Op}^2.$$

et, en posant $Op = y$,

$$\frac{1}{12}ma^2 + my^2;$$

le moment d'inertie du filet suivant sera pareillement

$$\frac{1}{12}m'a^2 + m'y'^2;$$

on aura de même, pour un troisième filet,

$$\frac{1}{12}m''a^2 + m''y''^2;$$

et ainsi de suite; donc on aura pour le moment d'inertie demandé

$$A_g = \frac{1}{12}a^2(m + m' + m'' + \ldots) + my^2 + m'y'^2 + m''y''^2 + \ldots.$$

Mais

$$m + m' + m'' + \ldots = M;$$

d'un autre côté, la quantité

$$my^2 + m'y'^2 + m''y''^2 + \ldots$$

n'est autre chose que le moment d'inertie (par rapport à l'axe O) de la droite $MN = b$, sur laquelle seraient venus se concentrer les masses des filets qu'elle traverse; donc

$$my^2 + m'y'^2 + m''y''^2 + \ldots = \frac{1}{12}Mb^2.$$

Enfin, au moyen de cette valeur, celle de A_g devient

$$(5) \qquad A_g = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$

Le moment d'inertie d'un parallélogramme par rapport à axe qui se projette sur l'un de ses sommets A, aura pour leur

$$(6) \qquad A = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) + \frac{1}{4} Md^2,$$

en désignant par d la diagonale qui répond au point A.

MOMENT D'INERTIE D'UN RECTANGLE.

Si le parallélogramme se change en un rectangle, $a^2+b^2=$ et les formules (5) et (6) deviennent respectivement

$$(7) \qquad A_g = \frac{1}{12} Md^2,$$

$$(8) \qquad A = \frac{1}{3} Md^2.$$

On trouverait sans peine, et par les mêmes consideratio que *le moment d'inertie d'un rectangle par rapport à l de ses côtés est égal au tiers de sa masse, multipliée pa carré de l'autre côté.*

MOMENT D'INERTIE D'UN PARALLÉLIPIPÈDE DROIT.

Soit un parallélipipède droit homogène, assis sur le parall logramme ACBD (*fig.* 107). Si on le décompose en n tranc égales et infiniment minces parallèles à la base, et ayant c cune pour masse m, le moment d'inertie de chaque tranch par rapport à l'axe du solide, sera, en vertu de la formule (

$$\frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

Multipliant cette valeur par n, on aura le moment d'iner du parallélipipède, savoir :

$$A_g = \frac{1}{12} mn(a^2 + b^2).$$

Mais

$$nm = M;$$

donc enfin

(8 *bis*) $$A_g = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Relativement à l'arête du point A, on aurait pareillement, en posant toujours $AB = d$,

(9) $$A = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) + \frac{1}{4} M d^2.$$

MOMENT D'INERTIE D'UN PARALLÉLIPIPÈDE RECTANGLE.

Si le parallélipipède se change en un parallélipipède rectangle, $a^2 + b^2 = d^2$, et les formules (8) et (9) deviennent respectivement,

(10) $$A_g = \frac{1}{12} M d^2,$$

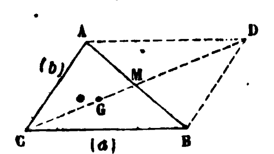
(11) $$A = \frac{1}{3} M d^2.$$

Si dans les formules précédentes (comme dans celles qui vont suivre) on remplace M, soit par la surface, soit par le volume que l'on considère, le moment d'inertie correspondant deviendra le moment d'inertie de la surface ou du volume.

MOMENT D'INERTIE D'UN TRIANGLE.

Soit une tranche triangulaire infiniment mince CAB (*fig.* 108); il s'agit de trouver son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure et mené par le milieu M du côté AB. Pour cela, j'achève le parallélogramme ACDB. M étant la masse du triangle, 2 M sera celle du parallélogramme; alors, en vertu de la formule (5), le moment d'inertie du parallélogramme par rapport à l'axe qui se projette en M, sera

Fig. 108.



$\frac{1}{12}(2M)(a^2 + b^2)$. Mais, relativement au même axe, le mo-

ment d'inertie du triangle est évidemment la moitié de celu
parallélogramme ; donc enfin

$$(12) \qquad A = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Posons maintenant $CM = \lambda$; le moment d'inertie du trian
par rapport à l'axe qui se projette au centre de gravité
aura pour valeur

$$(13) \qquad A_g = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) - \frac{1}{9} M\lambda^2.$$

Pour avoir le moment d'inertie relativement à un axe qu
projette au sommet C, il faudrait ajouter $M\left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 = \frac{4}{9}$ M
au second membre de la formule précédente, ce qui donne

$$(14) \qquad A = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) + \frac{1}{3} M\lambda^2.$$

MOMENT D'INERTIE D'UN PRISME TRIANGULAIRE DROIT.

Supposons qu'on ait décomposé le solide en n tranches in
niment minces, d'égale épaisseur, parallèles à la base, et ay
chacune pour masse m. Le moment d'une tranche, relati
ment à la ligne qui joint les centres de gravité des deux ba
du prisme, sera

$$\frac{1}{12} m (a^2 + b^2) - \frac{1}{9} m\lambda^2 ;$$

pour n tranches, ce moment sera

$$\frac{1}{12} nm (a^2 + b^2) - \frac{1}{9} nm\lambda^2.$$

Mais

$$nm = M ;$$

donc enfin

$$(15) \qquad A_g = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) - \frac{1}{9} M\lambda^2.$$

On trouve par le même raisonnement, et en se servant de
formule (14),

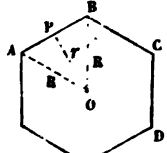
$$(16) \qquad A = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) - \frac{1}{3} M\lambda^2,$$

pour le moment d'inertie du prisme relativement à une de ses arêtes perpendiculaire au plan de la base.

MOMENT D'INERTIE D'UN POLYGONE RÉGULIER.

Soient ABCD un polygone régulier (*fig.* 109), O son centre. J'écris, pour abréger,

Fig. 109.



$$OA = R, \quad OP = r.$$

Cela posé, m étant la masse d'un triangle tel que AOB, son moment d'inertie par rapport à l'axe qui se projette en O sera, en vertu de la formule (14),

$$\frac{1}{12} m (R^2 + R^2) + \frac{1}{3} mr^2.$$

n étant le nombre des triangles du polygone, le moment d'inertietotal aura pour valeur

$$A_g = \frac{1}{12} nm (2R^2) + \frac{1}{3} nmr^2.$$

Mais

$$nm = M;$$

donc enfin

(17) $$A_g = \frac{1}{6} MR^2 + \frac{1}{3} M r^2.$$

MOMENT D'INERTIE D'UN CERCLE.

Si le polygone dégénère en un cercle, on aura

$$r = R,$$

et la formule précédente donnera

(18) $$A_g = \frac{1}{2} MR^2,$$

pour le moment d'inertie d'une tranche circulaire infiniment mince, relativement à un axe qui se projette à son centre.

Si l'on prend la moitié du résultat ci-dessus, on aura le moment d'inertie du cercle par rapport à un de ses diamètres.

MOMENT D'INERTIE D'UN PRISME RÉGULIER.

On trouve, par les mêmes considérations que précé ment,

$$(19) \qquad A_g = \frac{1}{6} MR^2 + \frac{1}{3} M r^2,$$

pour le moment d'inertie d'un prisme régulier, relativei à son axe de figure.

MOMENT D'INERTIE D'UN CYLINDRE.

De même, on aura pour un cylindre, et relativeme son axe,

$$(20) \qquad A_g = \frac{1}{2} MR^2.$$

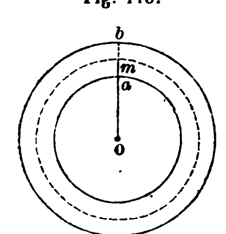
MOMENT D'INERTIE D'UN ANNEAU CYLINDRIQUE.

Posons, pour abréger,

$$Oa = r, \quad Ob = r'.$$

Le moment d'inertie de l'anneau sera évidemment la di rence des moments d'inertie des deux lindres qui ont pour rayons Ob, (*fig.* 110); alors on aura, en nomm m' et m les masses des cylindres et en nant pour axe l'axe de figure,

Fig. 110.



$$A_g = \frac{1}{2} m' r'^2 - \frac{1}{2} mr^2.$$

Soient D la masse de l'anneau sous l'ur de volume, H sa hauteur, on aura

$$m' = \pi r'^2 HD, \quad m = \pi r^2 HD;$$

par suite la valeur de A_g deviendra

$$A_g = \frac{1}{2} \pi HD (r'^4 - r^4) = \frac{1}{2} \pi HD (r'^2 - r^2)(r'^2 + r^2).$$

Mais

$$M = \pi HD (r'^2 - r^2);$$

donc enfin

$$(21) \qquad A_g = \frac{1}{2} M (r'^2 + r^2).$$

Soit encore la largeur de la jante $ab = e$, et nommons R le rayon moyen Om, nous aurons évidemment

$$r' = R + \frac{1}{2} e, \quad r = R - \frac{1}{2} e,$$

d'où l'on tire

$$r'^2 + r^2 = 2\left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right).$$

A l'aide de cette valeur, la formule (21) devient

$$(22) \qquad A_g = M\left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right).$$

Enfin, si l'on nomme P le poids de la jante, on aura

$$M = \frac{P}{g};$$

et la formule (22) deviendra finalement

$$(23) \qquad A_g = \frac{P}{g}\left(R^2 + \frac{1}{4} e^2\right).$$

C'est la valeur dont nous avons fait usage à la page 290.

MOMENT D'INERTIE D'UN VOLANT.

Soient P le poids de la jante d'un volant (*fig.* 111), ϖ le poids d'un bras, Q le poids du moyeu. R étant le rayon moyen de la jante, e sa largeur, r le rayon moyen du moyeu, ε sa largeur, l la longueur d'un bras, c sa largeur; on aura, pour les divers moments d'inertie, relativement à l'axe qui se projette

Fig. 111.



au centre O,

Jante.......... $\frac{P}{g}\left(R^2 + \frac{1}{4}e^2\right)$,

Bras........... $\frac{1}{12}\frac{\varpi}{g}\overline{ab}^2 + \frac{\varpi}{g}\overline{Om}^2 = \frac{1}{12}\frac{\varpi}{g}(l^2 + c^2$

$+ \frac{\varpi}{g}\left(\frac{1}{2}l + r + \right.$

Moyeu......... $\frac{Q}{g}\left(r^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$.

Donc le moment d'inertie du volant pris en entier sera, en gnant par n le nombre des bras,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} A_g = {} & \frac{P}{g}\left(R^2 + \frac{1}{4}e^2\right) \\ & + n\frac{\varpi}{g}\left[\frac{1}{12}(l^2 + c^2) + \left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}\varepsilon + r\right)^2\right] \\ & + \frac{Q}{g}\left(r^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\right). \end{aligned}\right.$$

VINGTIÈME LEÇON.

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN. — NOTIONS SUR QUELQUES COURBES USITÉES EN MÉCANIQUE. — SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DES ENGRENAGES.

TANGENTE, NORMALE A UNE COURBE.

73. Une courbe étant donnée, si on la partage en éléments infiniment petits, on pourra regarder chaque élément comme rectiligne. Si l'on prolonge l'élément de la courbe qui répond à un point donné, on aura la tangente à la courbe en ce point. Si, par ce même point, on mène une perpendiculaire à la tangente, cette perpendiculaire sera la normale à la courbe au point donné.

MOUVEMENT D'UNE COURBE SUR UNE AUTRE.

Considérons deux lignes polygonales ABCD..., aBCd... (*fig.* 112), ayant un côté commun BC, et leurs autres côtés BA, Ba,..., CD, Cd,..., égaux respectivement; si l'on fait rouler le premier polygone sur le second, de manière à amener en coïncidence CD avec Cd, il est évident que, pendant que le côté CD se meut vers Cd, le polygone ABCD tourne autour du point C. CD étant venu coïncider avec Cd, et le roulement continuant, le point d deviendra le centre d'une nouvelle rotation, et ainsi de suite. Or il est clair que ces rotations successives auront lieu, quelle que soit la grandeur commune des côtés des deux polygones; donc la même chose aura lieu quand ces polygones se changeront en courbes. Par conséquent, *quand une courbe roule sur une courbe fixe, chaque point de contact devient successivement le centre instantané*

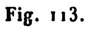
Fig. 112.

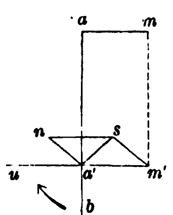
de rotation de la figure mobile; d'où il suit que les normales à toutes les lignes décrites par les divers points du plan de la courbe mobile viendront passer par ce point.

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN; EXEMPLES.

Tout mouvement d'une figure plane dans son plan est un mouvement de rotation autour d'un point fixe.

Soit am (*fig.* 113) la direction du mouvement d'un point quelconque a de la figure mobile, et menons sur am la perpendiculaire ab, que nous regarderons comme entraînant la figure proposée. Soit $a's$ le mouvement infiniment petit d'un point quelconque a' de la droite ab; nous pouvons remplacer le mouvement $a's$ par deux autres mouvements $a'n$, $a'm'$, dont l'un $a'm'$ sera égal à am et de même sens.


Fig. 113.



En décomposant de la même manière le mouvement de chacun des points de ab, on conclura que tous les points de cette ligne seront animés d'un mouvement commun de translation égal et parallèle à am, tandis que les autres mouvements seront généralement variables, soit en grandeur, soit en direction; et comme le point a est le seul des points de la ligne qui ne possède aucun de ces mouvements particuliers, on en conclut que la figure mobile, en vertu de ces derniers mouvements, ne pourra que tourner autour du point a, et en sens contraire du mouvement de am, ou dans le sens de la flèche. Soit ω la rotation infiniment petite d'un point quelconque a', l'espace parcouru par le point a' dans l'élément du temps sera

$$a'u = \omega . aa'.$$

Donc si l'on choisit le point a' de telle sorte qu'on ait la relation

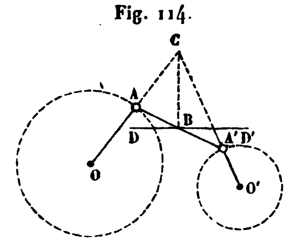
$$\omega . aa' = a'm' = am,$$

ce point restera fixe, étant animé de deux mouvements égaux et contraires. Le point a', ainsi déterminé, sera donc le centre

instantané de rotation de la figure mobile. Comme chaque point de cette figure décrit autour du centre instantané de rotation un élément circulaire infiniment petit, il en résulte que *les normales aux courbes décrites par les divers points de la figure mobile viendront toutes passer, à chaque instant, par le centre instantané de rotation.*

Soit, par exemple, une tige AA′ (*fig.* 114) articulée avec deux rayons OA, O′A′ qui l'obligent à s'appuyer constamment sur les deux circonférences O et O′; comme les points A et A′ décrivent chacun une circonférence de cercle, le centre instantané de rotation, qui répond à la position AA′ de la tige mobile, sera au point C, où les deux rayons OA, O′A′ se rencontrent.

Fig. 114.

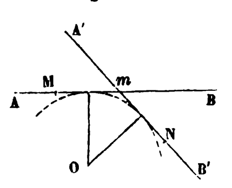


Si l'on veut connaître la direction du mouvement d'un point quelconque B de la tige AA′, il suffira de joindre le point B au point C; la ligne BC sera normale à la courbe décrite par le point B. Donc en menant DD′ perpendiculaire à CB, on aura la tangente à la même courbe, et, par conséquent, la direction du mouvement. La courbe décrite par un point quelconque B de la droite AA′ porte le nom de *courbe à longue inflexion.* Nous la retrouverons dans le parallélogramme de Watt.

Il est bien entendu que le centre instantané de rotation pourrait être situé à l'infini; dans ce cas, la rotation se changerait en une translation.

On peut donner du théorème ci-dessus une démonstration purement géométrique. Soit toujours AB (*fig.* 115) une droite tracée dans le plan de la figure mobile, et entraînant celle-ci dans son mouvement. Soit aussi A′B′ la position infiniment voisine que vient prendre AB. Si nous supposons que le point M de la ligne AB soit venu se placer en m, le point m de la même ligne sera venu en un point N tel, que $m\text{N} = m\text{M}$. Décrivons maintenant une circonférence de cercle qui passe

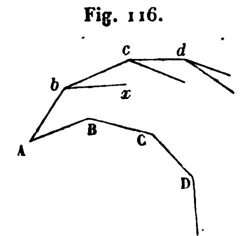
Fig. 115.



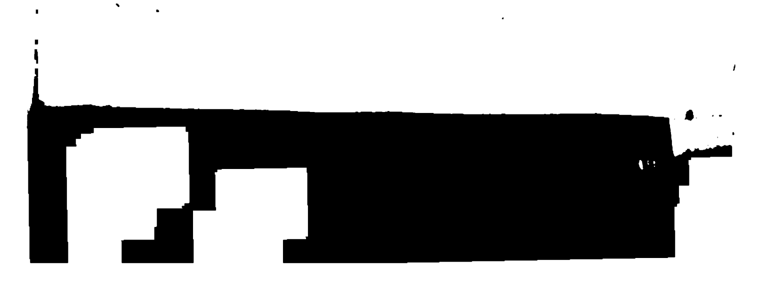
par les milieux de Mm et de Nm; cette circonférence ser gente aux deux droites AB, A'B'; par conséquent, pour a la droite AB dans la position A'B', il suffira de la faire g sur la circonférence décrite. Mais la figure dont il s'agit a pagne le mouvement de AB à laquelle elle est supposée riablement liée; donc pendant le déplacement infiniment de la figure proposée, celle-ci tournera autour du point C est le centre instantané de rotation.

Pour nous faire une idée exacte du mouvement de la f mobile, nommons A, B, C, D (*fig*, 116) les centres inst nés de rotation, et supposons le point A appartiènne à la f mobile. Tirons Ab qui fasse AB un angle égal à l'angle de tion autour du point A, et pre Ab = AB. Au point b constru l'angle Abx = B, et tirons bc = qui fasse avec bx un angle égal à l'angle de rotation autou point B, et ainsi de suite. Dans le mouvement de la figure bile autour du point A, la droite Ab viendra coïncider AB; d'ailleurs l'angle Abx = B : donc bx viendra se su poser à BC. Mais l'angle cbx est égal à la rotation de la fi mobile autour du point B; par conséquent la deuxième r tion fera coïncider bc avec BC. Pareillement, la troisième tation amènera cd sur CD, et ainsi de suite. On peut do représenter le mouvement de la figure mobile comme d roulement de la courbe Abcd... sur la courbe ABCD... voit que *la courbe* Abcd... *n'est autre chose que le lieu points de la figure mobile, qui viennent successivement c cider avec les centres instantanés de rotation.*

Fig. 116.

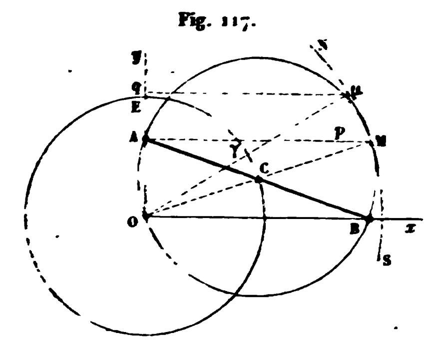


Considérons, par exemple, le mouvement d'une droite (*fig.* 117), invariable de longueur, entre les deux côtés de l'a droit xOy. Pour une position quelconque de la ligne mo le centre instantané de rotation sera au point M : mais à c que les diagonales d'un rectangle sont égales, OM = AB; tous les points M sont situés sur une circonférence de c



décrite du point O avec AB pour rayon. Remarquons maintenant que l'angle AMB est droit; donc le point M, considéré comme appartenant à la figure mobile, est situé sur une circonférence de cercle décrite sur AB comme diamètre. Par conséquent, les points de la figure mobile qui viendront successivement coïncider avec la circonférence MNS, sont situés sur la circonférence OAMB. Le mouvement de la droite AB pourra donc être produit par le roulement de la circonférence OAMB sur la circonférence fixe NMS.

Fig. 117.



Comme le point C, milieu de AB, est distant du point O d'une quantité $OC = \frac{1}{2} AB$, il en résulte qu'on pourra également produire le mouvement de AB en articulant le milieu C de cette tige avec un rayon OC tournant autour du point O.

Supposons que le rayon OC vienne en $O\gamma$, Ω étant la vitesse angulaire, τ l'élément du temps, on aura

$$C\gamma = \Omega\tau . OC.$$

Mais pendant ce déplacement le point A est arrivé en q; et comme le point M est le centre instantané de rotation pour la position AB de la tige mobile, on aura

$$Aq = \mu p = \omega\tau . AM,$$

ω désignant la vitesse angulaire autour du point M. Mais les triangles rectangles semblables $M\mu p$, OMA donnent

$$\frac{\mu p}{M\mu} = \frac{AM}{OM}, \quad \text{d'où} \quad \mu p = \frac{AM . M\mu}{OM}:$$

comparant les deux valeurs de μp, il vient

$$\omega\tau = \frac{M\mu}{OM}.$$

D'un autre côté, les arcs semblables $M\mu$, $C\gamma$ donnent

$$\frac{M\mu}{OM} = \frac{C\gamma}{OC} = \Omega\tau ;$$

donc

$$\omega = \Omega :$$

ce qui fait voir que *la vitesse angulaire de la tige mobile autour de son centre instantané de rotation, est ég chaque instant à celle du rayon* OC. Cela posé, les vit des points A et B auront pour valeurs, en faisant AM : BM $= y$: suivant Oy

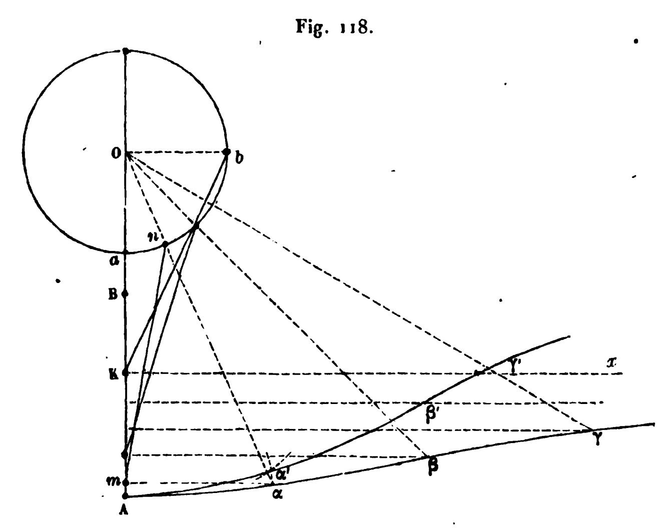
$$V_y = \Omega x,$$

suivant Ox

$$V_x = -\Omega y.$$

La courbe de la figure mobile, lieu des points qui vien coïncider successivement avec les centres instantanés de r tion, ne se détermine pas toujours aussi aisément que l'exemple précédent. Supposons, par exemple, une bielle (*fig.* 118) mue par un piston dont la course est AB, et qui

Fig. 118.



ticule avec une manivelle Oa, à laquelle elle fait décrire circonférence O. Si nous considérons la bielle dans la positi

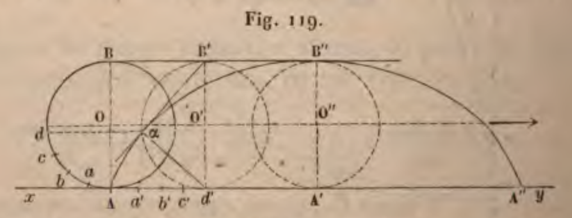
mn, le centre instantané de rotation, qui répond à cette position, s'obtiendra en menant le rayon On, la perpendiculaire $m\alpha$, et prolongeant ces deux lignes jusqu'à leur rencontre α. En cherchant les centres instantanés qui répondent à diverses positions de la bielle, on construira la courbe $A\alpha\beta\gamma$. Si l'on remarque que le centre instantané, correspondant à la position Kb de la bielle, est à la rencontre des deux parallèles Ob, Kx, on en conclura que la ligne Kx est une asymptote à la courbe ci-dessus. Pour déterminer le point α' de la figure mobile qui viendra coïncider avec α, il suffira évidemment de décrire des points A, a, deux arcs de cercles en prenant pour rayons $m\alpha$, $n\alpha$; le point de rencontre α' sera le point demandé. Il est clair que lorsque la bielle, qui entraîne le point α', prendra la position mn, ce point α' coïncidera avec α. Une construction analogue donnera les points $\beta', \gamma', \ldots$, qui viendront coïncider successivement avec $\beta, \gamma, \ldots$. Par conséquent, si la courbe $A\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ est invariablement liée avec la bielle, le roulement de cette courbe sur la courbe fixe $A\alpha\beta\gamma\ldots$ réglera le mouvement de la bielle dans toute l'étendue du quart de cercle anb, exactement comme le ferait le piston.

CYCLOIDE.

74. *La cycloïde est une courbe engendrée par un point d'une circonférence de cercle qui roule sur une droite fixe, située dans son plan.*

Ainsi, par exemple, si l'on fait rouler la circonférence O (*fig.* 119) sur la droite xy, dans le sens de la flèche, le point

Fig. 119.



A engendrera une cycloïde. Faisons rouler le cercle O jusqu'en O'; pendant ce mouvement, les éléments de la circonférence

mobile viendront coïncider successivement avec ceux d droite fixe ; par conséquent lorsque le cercle O sera venu en le point A se sera élevé dans la circonférence jusqu'en point α tel, que $A d' =$ arc $d'\alpha$; on obtiendra donc un p de la cycloïde en prenant arc $A d = A d'$, et décrivant un de cercle du centre d' avec la corde $A d$ pour rayon ; le p où cet arc de cercle coupera la parallèle $d\alpha$, sera un point la courbe. On voit que, pour tracer la cycloïde, il fau d'abord partager la circonférence mobile O en parties a petites pour que chaque arc puisse être regardé comme ég sa corde, mener ensuite des parallèles par les points de d sion, porter successivement les divisions $A a$, ab, bc,..., Ay, et couper les parallèles par des arcs de cercles ayant p rayons les cordes Aa, Ab, Ac,... ; les points d'intersecti ainsi obtenus seront autant de points de la cycloïde. Quan circonférence mobile aura parcouru la ligne $AA' = \frac{1}{2}$ circ C point A se sera élevé jusqu'en B″. A partir de ce moment point mobile redescendra vers xy, en décrivant une cou B″A″ qui sera symétrique de AB″. Le cercle O continuai rouler, le point mobile engendrera une courbe identique première, et ainsi de suite ; donc la cycloïde sera formée d' suite d'arceaux, tels que AB″A″.

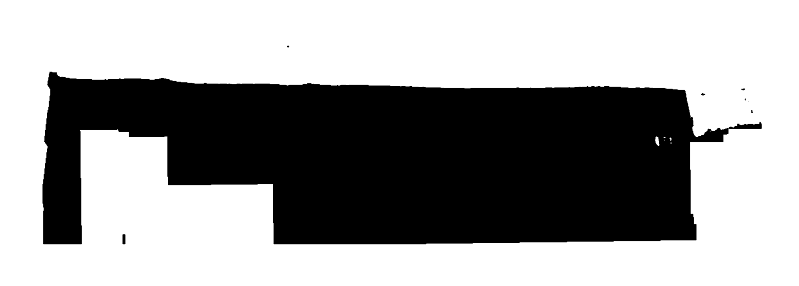
Si nous considérons le cercle mobile dans la position O', point d' sera le centre instantané de rotation ; par conséq le point α tendra à décrire un arc de cercle autour du point La ligne $d'\alpha$ sera donc normale à la cycloïde, et la corde E tangente.

ÉPICYCLOIDE.

75. *L'épicycloïde est une courbe engendrée par un p d'une circonférence de cercle qui roule sur une circonfére fixe située dans son plan.*

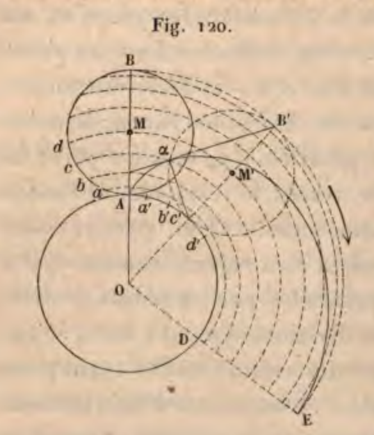
Ainsi, par exemple, si l'on fait rouler la circonférence (*fig.* 120) sur la circonférence O, dans le sens de la flèche point A engendrera une épicycloïde.

Supposons que le cercle M soit venu en M' ; pendant



mouvement, les éléments successifs de la circonférence mobile viendront coïncider avec ceux de la circonférence fixe; par conséquent lorsque le cercle M sera venu en M′, le point A se sera élevé, dans la circonférence M, jusqu'en un point α tel, que arc $c'\alpha =$ arc Ac'; on obtiendra donc un point de l'épicycloïde en prenant arc $Ac =$ arc Ac', et décrivant un arc de cercle du centre c' avec la corde Ac pour rayon. Le point où cet arc de cercle coupera la circonférence décrite du centre O avec Oc pour rayon, sera un point de la courbe. On voit que pour tracer l'épicycloïde, il faudra d'abord partager la circonférence mobile M en parties assez petites pour que chaque arc puisse être considéré comme égal à sa corde, tracer ensuite des circonférences par les points de division en prenant le point O pour centre; porter successivement les divisions Aa, ab, bc, . . . , sur circ O, prendre pour centres les points a', b', c', . . . , et couper les circonférences déjà décrites par des arcs de cercles ayant pour rayons les cordes Aa, Ab, Ac, . . . : les points d'intersections ainsi obtenus seront autant de points de l'épicycloïde. Quand la circonférence mobile aura parcouru arc AD $= \frac{1}{2}$ circ. M, le point A se sera élevé jusqu'en E. A partir de ce moment, le point mobile redescendra vers circ. O, en décrivant une courbe symétrique de la première.

Fig. 120.

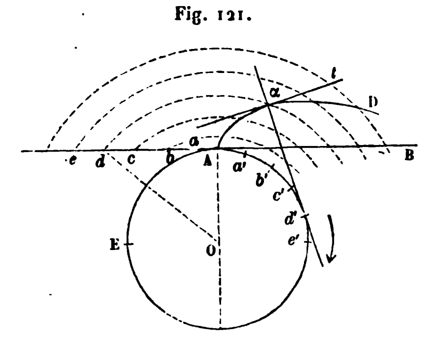


Si nous considérons le cercle mobile dans la position M′, le point c' sera le centre instantané de rotation; par conséquent le point α tendra à décrire un arc de cercle autour du point c'. La ligne $c'\alpha$ sera donc normale à l'épicycloïde, et la corde B′α tangente.

DÉVELOPPANTE DE CERCLE.

76. *La développante de cercle est une courbe engendrée par un point d'une tangente au cercle qui roule sur la circonférence supposée fixe.* Ainsi, par exemple, si l'on fait rouler la tangente AB (*fig.* 121) sur la circonférence O dans le sens de la flèche, le point A engendrera une développante.

Fig. 121.



Supposons que la tangente AB se transporte en $d'\alpha$; pendant ce mouvement les éléments successifs de la ligne mobile viendront coïncider avec ceux de la circonférence fixe; par conséquent, lorsque la tangente AB sera venue en $d'\alpha$, le point A se sera élevé sur la tangente, jusqu'en un point α tel, que $d'\alpha =$ arc Ad'. On obtiendra donc un point de la développante en prenant $Ad =$ arc Ad', et décrivant un arc de cercle du centre d' avec Ad pour rayon; le point où cet arc de cercle coupera la circonférence $d\alpha$ décrite du centre O avec Od pour rayon, sera un point de la courbe. On voit que, pour tracer la développante, il faudra d'abord partager la tangente mobile en parties assez petites pour que chacune d'elles puisse être regardée comme égale à l'arc de cercle qu'elle sous-tendrait sur circonférence O, tracer ensuite des circonférences par les points de division en prenant le point O pour centre; porter successivement les divisions Aa, ab, bc, ..., sur circonférence O, prendre pour centres les points a', b', c', ..., et couper les circonférences déjà décrites par des arcs de cercles ayant pour rayons les lignes Aa, Ab, Ac, ... Les points d'intersections ainsi obtenus seront autant de points de la développante.

Quand la tangente mobile occupe la position $d'\alpha$, le point d' est le centre instantané de rotation; par conséquent, le point α tendra à décrire un arc de cercle autour du point d'; la ligne

$d'\alpha$ sera donc normale à la développante. En menant une perpendiculaire αt à la normale, on aura la tangente au point α.

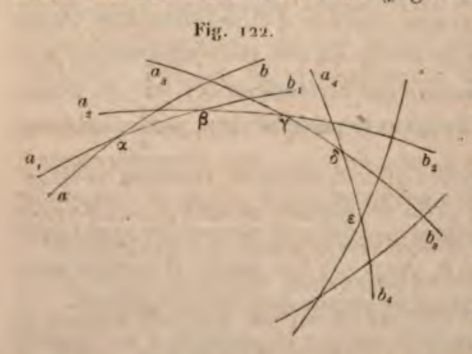
Si on voulait décrire la développante engendrée par un point quelconque e de la tangente, on commencerait par déterminer l'origine de la courbe, en prenant arc $A\varepsilon = Ae$; on mènerait une tangente par le point ε, et l'on opérerait comme ci-dessus. Concevons maintenant qu'on ait tracé les développantes relatives aux points $a, b, c, d, \ldots$, chacune de ces développantes sera normale à la tangente Ae. Par conséquent, si l'on fait tourner le cercle O autour du point O, la courbe AD sera toujours normale à cette tangente. Donc, si le cercle tourne en sens contraire de la flèche et que la ligne Ae soit mobile, la développante la poussant à chaque instant suivant sa direction, lui imprimera un mouvement rectiligne.

COURBES ENVELOPPES.

77. *Lorsqu'une ligne droite ou courbe se meut d'après une loi quelconque, chaque courbe coupe généralement la courbe infiniment voisine qui la précède en un certain point. La ligne sur laquelle sont situés tous ces points d'intersections s'appelle la courbe enveloppe ou simplement l'enveloppe de la courbe mobile.*

Considérons, par exemple, une suite de positions infiniment voisines d'une courbe ab (*fig.* 122) (qui pourrait varier de forme pendant le mouvement); soient $ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, \ldots$, ces diverses positions. La courbe a_1b_1 coupe la courbe ab en un certain point α; de même la courbe a_2b_2 rencontre a_1b_1 en β; a_2b_2 est coupée à son tour en γ par la ligne a_3b_3, et ainsi de suite. La suite des points $\alpha, \beta, \gamma, \partial, \ldots$, forme une courbe $\alpha\beta\gamma\partial\ldots$ qui est la

Fig. 122.

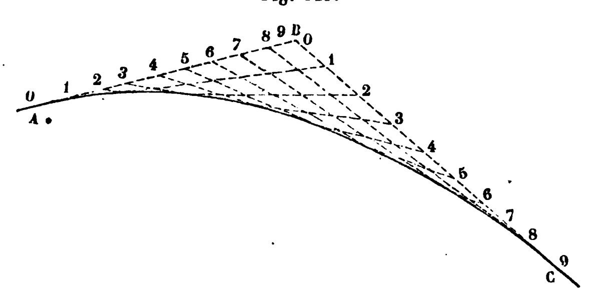


courbe enveloppe de la courbe mobile *ab*. Considér courbe mobile dans une quelconque de ses positions $a_1 b_1$ courbe passe par deux points infiniment voisins β, γ, de l' loppe. L'enveloppe et la courbe mobile ont donc un élémen mun $\beta\gamma$, partant *la courbe mobile est constamment tang son enveloppe.*

COURBE DU CHIEN.

Pour donner un exemple du tracé d'une courbe envel proposons-nous de résoudre le problème suivant : Un est dans les champs, au point A (*fig.* 123), pendant qu

Fig. 123.



maître parcourt le sentier rectiligne BC. Arrivé au point maître siffle son chien, qui se dirige alors constamment lui. On demande quelle courbe décrira l'animal si la renc du maître et du chien doit se faire en un point donné C. résoudre ce problème, joignons le point B au point A, partageons BA en un certain nombre de parties égales ; p geons aussi BC en un nombre égal de parties égales, et n rotons les divisions comme on le voit sur la figure. Joignan suite par des droites les points marqués des mêmes numéro aura une série de lignes qui, par leurs intersections cons tives, formeront une courbe satisfaisant à la question. Le blème qui précède est susceptible d'une infinité de soluti cela tient à ce que dans l'énoncé on n'a imposé au m que l'obligation d'arriver au point C en même temps q chien. La courbe qui vient d'être construite est une parab elle est d'un fréquent usage dans le tracé des routes, co ligne de raccordement.

SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

78. *La spirale d'Archimède est une courbe engendrée par le mouvement d'un point qui, partant du centre d'une circonférence, parcourt un rayon d'un mouvement uniforme, tandis que celui-ci, également animé d'un mouvement uniforme, accomplit autour du centre une révolution entière.*

Supposons, par exemple, qu'un point matériel, partant du centre O (*fig.* 124), décrive OA pendant que ce rayon OA accomplit autour du point O une révolution entière; le lieu des diverses positions du point mobile sera la spirale d'Archimède. Pour tracer cette courbe, il suffira de partager la circonférence OA et le rayon OA en un même nombre de parties égales, par exemple en 16. Portant une division du rayon sur O_1, deux sur O_2, ..., et ainsi de suite, on aura autant de points qu'on voudra de la spirale. La distance d'un point quelconque de la courbe au centre O est le rayon vecteur de ce point. On voit par ce tracé que chaque rayon vecteur surpasse le précédent d'une quantité constante. C'est cette propriété qu'on utilise en mécanique pour produire un mouvement uniforme de va-et-vient, ainsi que nous le verrons plus loin.

Fig. 124.



Soient r le rayon vecteur d'un point quelconque de la courbe, et φ l'angle que ce rayon vecteur fait avec OA, φ sera compté dans le sens de la flèche de 0^0 à 2π, ou plutôt de 0^0 à un nombre quelconque $2m\pi$ de circonférences. v et ω étant les vitesses constantes du point mobile et du rayon tournant,

on aura, après un temps quelconque t,

$$r = vt, \quad \varphi = \omega t,$$

d'où

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{v}{\omega}.$$

Posant OA $=$ R, la loi de la génération de la courbe do

$$\frac{v}{\omega} = \frac{R}{2\pi};$$

donc aussi

(1) $$\frac{r}{\varphi} = \frac{R}{2\pi},$$

d'où

$$r = \frac{R}{2\pi}\varphi.$$

La relation ci-dessus est l'équation de la courbe; le c cient $\frac{R}{2\pi}$ en est le paramètre. Si du point O on décrit un conférence, en prenant pour rayon $Oa = \frac{R}{2\pi}$, les arcs ab $ad, \ldots$, seront respectivement égaux aux rayons vecteurs $O\beta, O\gamma, \ldots$; d'où il résulte que la différence de deux ra vecteurs quelconques est égale à l'arc du cercle Oa c comprennent.

Soit m un point quelconque de la courbe; tirons le r vecteur Om, puis du point O menons On perpendiculaire rayon vecteur; la droite mn sera la normale demandée.] le démontrer, supposons que mn soit normale à la courb je dis qu'on aura $On = Oa$. Soit S un point infiniment vo du point m; en décrivant du point O comme centre l'ar cercle mK, le triangle mSK sera semblable au triangle O, d'abord ces deux triangles sont rectangles l'un en O, l'a en K; en second lieu, les angles nmS, OmK, étant ég comme droits, si l'on retranche l'angle commun OmS, il r

$$nmO = SmK.$$

Mais la comparaison des côtés homologues donne

$$\frac{On}{SK} = \frac{Om}{mK};$$

d'un autre côté, les secteurs OmK, Out étant semblables, donnent

$$\frac{Ou}{ut} = \frac{Om}{mK};$$

donc

$$\frac{On}{SK} = \frac{Ou}{ut}:$$

mais

$$SK = ut,$$

d'après ce qui a été dit plus haut; partant

$$On = Ou. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En menant par le point m une perpendiculaire à la normale mn, on aura la tangente à la courbe.

BUT ET SOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL DES ENGRENAGES.

79. Deux roues circulaires se touchent au point A (*fig.* 125), et peuvent tourner autour de deux axes parallèles projetés en O et O′. Si la roue O est mise en mouvement dans le sens de la flèche, elle fera tourner la seconde autour de O′ dans le sens de la flèche supérieure. Si pendant une rotation infiniment petite de la roue O, le point A de cette roue touche constamment le même point de la roue O′, la transmission du mouvement se fera sans glissement, et la vitesse du point de contact A sera la même dans les deux roues. Par conséquent, si l'on nomme R, R′ les rayons des roues O et O′, ω et ω' leurs vitesses angulaires à un instant quelconque, on aura

Fig. 125.



$$\omega R = \omega' R', \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}.$$

De là il suit que *les vitesses angulaires de deux roues qui*

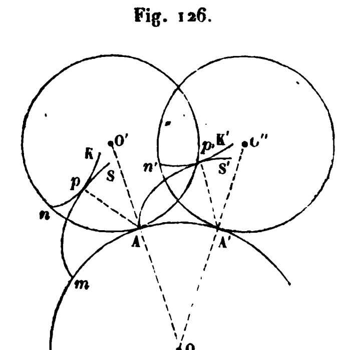
tournent sans glissement l'une sur l'autre sont en raison inverse de leurs rayons.

Les vitesses angulaires de rotation étant dans un rapport constant, il s'ensuit que *si l'une des roues se meut d'un mouvement uniforme, l'autre se mouvra aussi d'un mouvement uniforme.* Si la roue O′ n'offre qu'une faible résistance au mouvement, le simple contact suffira pour transmettre à la roue O′ le mouvement de la roue O; mais il n'en sera pas ainsi lorsque la roue O′ offrira une grande résistance. Alors il sera nécessaire d'armer les circonférences des deux roues de parties saillantes ou *dents* qui s'engrènent mutuellement. De la sorte la pression des dents de la roue O sur les dents de la roue O′ transmettra à celle-ci le mouvement de la première.

Cela posé, le problème des engrenages a pour but de *déterminer quelle doit être la forme des dents des deux roues, pour que la transmission du mouvement se fasse comme si elles étaient simplement tangentes.*

Pour résoudre le problème des engrenages, on peut se donner à volonté le profil des dents de l'une des roues, et chercher quel devra être le profil des dents de l'autre roue. Soit donné le profil nK (*fig.* 126) de l'une des dents de la roue O′; soit aussi mS le profil inconnu de la dent de la roue O, et supposons les deux dents l'une en m, l'autre en n; comme le mouvement se fait de la même manière que si les deux roues étaient simplement tangentes, les deux arcs Am, An seront de même longueur. Faisons mouvoir maintenant tout le système autour du centre O, jusqu'à ce que le point m arrive en A; à ce moment A sera en un point A′ tel, que AA′ = Am, et la roue O′ sera venue en O″. Dans cette position, la dent nK étant

Fig. 126.



en n'K', on aura

$$A'n' = AA' ;$$

d'ailleurs la figure s'est déplacée tout d'une pièce ; les deux dents seront donc encore tangentes, et l'on voit que la roue O' aura exactement la même position que si, la roue O étant restée fixe, la roue O' avait roulé sur elle jusqu'en A'. Mais pendant ce mouvement, la courbe n'K' est restée toujours tangente à AS' : donc *le profil* AS' *est l'enveloppe de la courbe* n'K', *pendant qu'on fait rouler la roue* O' *sur la roue* O *supposée fixe*. Maintenant je joins le point de contact p' avec le point A'. Le cercle mobile ayant la position O'', le point A' est le centre instantané de rotation ; donc pendant un mouvement infiniment petit du cercle mobile, le point p' se meut dans une direction perpendiculaire à A'p' ; mais le point p' ne quitte pas AS', donc la ligne A'p' est normale à la courbe AS ; d'un autre côté n'K' est tangente à AS' au point p', partant A'p' est aussi normale à la courbe donnée. Le pied p' de la normale à la courbe donnée est donc un point de l'enveloppe de n'K', et par conséquent un point de la courbe cherchée. Si nous replaçons la figure dans sa position primitive, nous conclurons que *le point de contact de deux dents est situé au pied de la normale abaissée du point* A *sur l'une d'elles*. Il résulte de ce qui précède que *pour tracer le profil de l'une des dents de la roue* O, *il suffira de faire rouler le cercle* O' *sur le cercle* O, *puis d'abaisser des divers points de contact des normales sur le profil donné de la dent de la première roue* O' ; *les pieds de ces normales seront autant de points de la courbe demandée*. On voit que toute la difficulté du tracé des engrenages consiste à abaisser d'un point donné une normale à une courbe donnée. Et comme la géométrie ne donne pas la solution générale de ce problème, il faudra choisir pour profil des dents de la roue O', des courbes auxquelles on sache mener des normales par des points extérieurs. C'est pourquoi, dans la pratique, on prend pour dents de la roue O', soit des rayons, soit des cercles, soit des développantes de cercles. De là trois espèces d'engrenages :

L'engrenage à flancs;

L'engrenage à fuseaux ou à lanterne;

L'engrenage à développantes de cercles.

Le premier et le dernier sont très-usités; le second n'est pas employé dans les engrenages de précision.

PAS ET JEU D'UN ENGRENAGE.

Il doit être entendu que chaque dent présente le même profil des deux côtés, afin que la rotation puisse se faire dans un sens et dans l'autre.

On nomme *base d'une dent, l'arc de la circonférence primitive occupé par cette dent;* à côté de chaque dent se trouve un vide dans lequel vient se loger la dent de l'autre roue. Un *plein* et un *vide* (mesurés sur la circonférence primitive de la roue) forment une *division* ou le *pas de l'engrenage.* On peut dire aussi que *le pas d'un engrenage est la distance qui sépare les milieux de deux dents consécutives, ou la distance entre le commencement d'une dent et celui de la suivante, cette distance étant mesurée sur la circonférence primitive.* Ordinairement le vide surpasse le plein de $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{15}$ de la largeur du plein; *la différence entre le vide et le plein est le jeu de l'engrenage;* le jeu s'élève à $\frac{1}{20}$ dans les engrenages de précision.

Si la roue O tourne d'une quantité telle, que le point A décrive le pas de l'engrenage de la première roue, le point A considéré comme appartenant à la deuxième roue aura décrit un arc de même longueur; et il est évident que cet arc devra être pris pour pas de l'engrenage de la deuxième roue. Cela étant, les pleins de deux dents seront de même longueur dans les deux roues, ainsi que les vides, si le jeu est le même de part et d'autre. En effet, soient p et p', v et v' les pleins et les vides qui dans chaque roue composent le pas de l'engrenage on aura

$$p + v = p' + v'.$$

Posant maintenant

$$v = p + \frac{p}{n}, \quad v' = p' + \frac{p'}{n};$$

l'égalité ci-dessus deviendra

$$p\left(\frac{2n+1}{n}\right) = p'\left(\frac{2n+1}{n}\right),$$

d'où

$$p = p';$$

par suite on a aussi $v = v'$. Soit ϖ la longueur du pas, on aura

$$2p + \frac{p}{n} = \varpi,$$

d'où

(1) $$p = \frac{n}{2n+1}\varpi;$$

on trouve ensuite pour la valeur du vide

$$v = \frac{n+1}{2n+1}\varpi.$$

Si, par exemple, $n = 15$, on obtient

$$p = \frac{15}{31}\varpi, \quad v = \frac{16}{31}\varpi.$$

CALCUL DU NOMBRE DES DENTS.

Soient n et n' les nombres des dents des roues O et O'; R et R' étant toujours les rayons des deux roues, ϖ le pas de l'engrenage, on aura

$$n\varpi = 2\pi R, \quad n'\varpi = 2\pi R';$$

d'où

(3) $$\frac{n'}{n} = \frac{R'}{R}.$$

Ce qui fait voir *que les nombres des dents des deux roues sont entre eux comme leurs rayons.*

Rappelons que l'on a aussi

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R'}{R},$$

ω et ω' étant les vitesses angulaires de rotations ; donc

$$(4) \qquad \frac{n'}{n} = \frac{\omega'}{\omega} :$$

de sorte que *les nombres des dents des deux roues s raison inverse de leurs vitesses de rotations.*

Mais il ne faut pas croire que tous les nombres enti vérifient l'équation (3) puissent être pris pour nomb dents des deux roues, car il faut que les roues aient a dents pour que, lorsque deux d'entre elles cessent d'ê prise, deux autres au moins les remplacent, afin d'évi chocs qui seraient la conséquence de la discontinuité du vement. M. Savary a démontré que pour que deux de moins soient en prise, on devait avoir, en désignant] et R' le nombre des dents et le rayon de la petite roue,

(5)

Dans l'engrenage à flancs.......	$n' =$ ou $> 10\Big(1 +$
» » à lanterne.....	$n' =$ ou $> 7 + 4$
» » à développantes	$n' =$ ou $> 16 + 2$

Ayant déterminé n', l'équation (3) fera connaître n.

Supposons, par exemple, $\frac{R'}{R} = \frac{3}{4}$; les limites ci-dessus de dront :

Pour l'engrenage à flancs... ...	$n' =$ ou $> 17\frac{1}{2}$,
» » à lanterne.....	$n' =$ ou > 10,
» » à développantes	$n' =$ ou $> 17\frac{1}{2}$.

Mais, dans ce cas, l'équation (3) donne

$$n = \frac{4n'}{3},$$

donc n' doit être un multiple de 3. De là il suit qu'on pourra prendre pour n' tous les multiples de 3 qui satisferont aux limites ci-dessus.

Si l'on prend, par exemple, $n' = 18$, on aura

$$n = 24.$$

Mais il doit être entendu que, tout en satisfaisant aux limites précédentes, on donnera aux dents une épaisseur convenable, selon l'effort qu'elles auront à supporter.

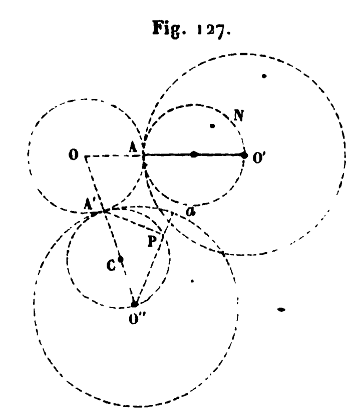
VINGT ET UNIÈME LEÇON.

TRACÉ DES ENGRENAGES.

ENGRENAGE A FLANCS.

80. Prenons un rayon O′A (*fig.* 127) pour profil des de la roue O′. Pour construire le profil de la dent de la r qui doit mener ce ra il faut faire rouler le cle O′ sur le cercle O qu'en un point quel que A′, et abaisser en du point A′ une perpe culaire sur O′A dar nouvelle position O″ pied P de cette perpe culaire sera un poin la courbe cherchée (Décrivons maintenan

Fig. 127.

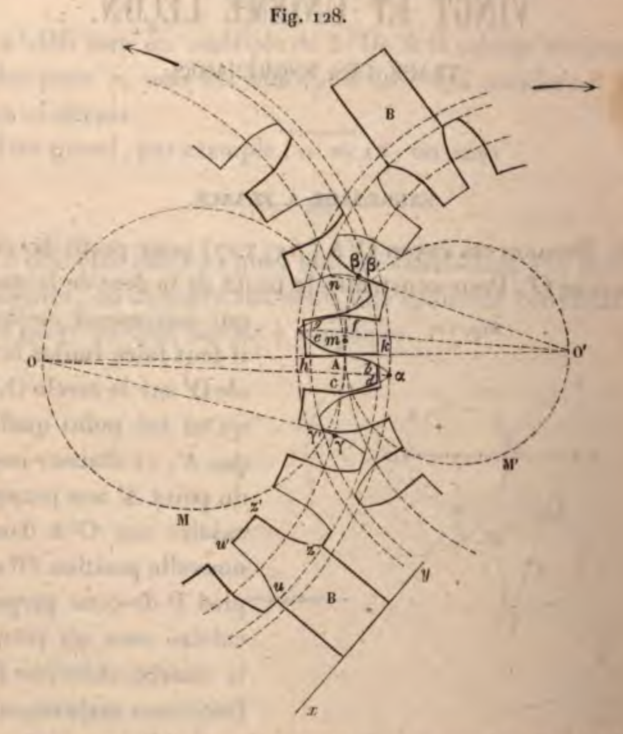


cercle sur O″A′ comme diamètre; le point P sera situé s circonférence de ce cercle. Remarquons maintenant que l'a O″, considéré dans la circonférence O″, a pour mesure l'arc tandis que ce même angle, considéré dans la circonfér A′PO″, a pour mesure la moitié de l'arc A′P; donc l'arc contient deux fois plus de degrés que l'arc A′*a*. Mais le ra $CA' = \frac{1}{2} O''A'$, donc les degrés du cercle A′PO″ sont mo moins grands que ceux du cercle O″; par suite les arcs A A′P, sont de même longueur. *Donc le point* P *appartien l'épicycloïde engendrée par le point* A *du cercle* ANO′, *r lant sur la circonférence du cercle* O.

TRACÉ DES DENTS.

Soient O et O′ (*fig.* 128) les circonférences primitives des

Fig. 128.



deux roues qu'il faut armer de dents. Je commence d'abord par déterminer le rapport des rayons OA, O′A, et je trouve, par exemple,

$$\frac{R'}{R} = \frac{3}{4}.$$

L'engrenage devant être à flancs, la formule générale du numéro précédent, savoir :

$$n' = \text{ ou } > 10\left(1 + \frac{R'}{R}\right),$$

donne

$$n' = \text{ ou } > 17\frac{1}{2}.$$

Je prendrai $n' = 18$. Mais

$$\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'} = \frac{4}{3};$$

donc

$$n = 24.$$

Adoptant $\frac{1}{10}$ pour le jeu de l'engrenage, la formule générale

$$p = \frac{n}{2n+1}\varpi,$$

du numéro précédent, donne, pour $n = 10$,

$$p = \frac{10}{21}\varpi.$$

Je divise maintenant la circonférence O en 24 parties égales, la petite en 18, et je porte ensuite la grandeur du plein dans chaque division, vers la droite dans la grande circonférence, vers la gauche dans la petite; sur O′A et OA comme diamètres je décris aussi des circonférences. En faisant rouler de gauche à droite le cercle O′M′A sur le cercle O, le point A engendrera un arc $A\alpha$ d'épicycloïde qui sera le profil d'un des côtés de la dent. Ayant mené $O\alpha$ par le milieu du plein, je trace de l'autre côté de cette ligne un arc de courbe symétrique du premier, et j'obtiens ainsi la dent $A\alpha c$. Au moyen d'un patron découpé avec soin sur cette dent, on construira sans peine toutes les autres. Ainsi en donnant à la dent de la roue O le profil ci-dessus, cette dent conduira la partie droite ou le flanc de la roue O′. Si l'on veut que l'engrenage soit réciproque, c'est-à-dire que la roue O′ puisse à son tour conduire le flanc de la roue O, on armera les dents de la roue O′ de parties courbes, qui seront des arcs d'épicycloïde engendrés par le point A de la circonférence AMO, roulant de droite à gauche sur la circonférence O′.

ÉCHANFRINER LES DENTS.

Retrancher la partie aiguë de chaque dent, cela s'appelle les *échanfriner*. Supposons qu'on impose aux dents de chaque

roue la condition de conduire les dents de l'autre jusqu'à la distance d'un pas compté de la ligne des centres; il suit de là que si l'on prend les arcs $A\beta$ et $A\gamma$ égaux chacun au pas de l'engrenage, et qu'on tire les rayons $O'\beta$, $O\gamma$, les points β' et γ', où ces rayons coupent les circonférences $O'M'A$, OMA seront les points de contact du flanc et de la dent qui le mène, et par conséquent les limites des dents. Donc si du point O pris pour centre, et avec $O\beta'$ pour rayon, on décrit une circonférence, cette circonférence limitera toutes les dents de la roue O. De même, si du point O' pris pour centre, et avec $O'\gamma'$ pour rayon, on décrit une autre circonférence, celle-ci limitera toutes les dents de la roue O'. Ainsi $Abcd$ est la dent échanfrinée de la roue O, $Aefg$ est la dent échanfrinée de la roue O'.

LIMITE DES FLANCS.

La circonférence $\beta'bd\ldots$, qui limite les dents, vient couper la ligne des centres en un point qui marque, dans la roue O', le point de la roue O le plus rapproché du point O'; donc si du point O' comme centre, et avec un rayon $O'k$ qui laisse un peu de jeu, on décrit une circonférence, cette circonférence marquera dans la roue O' la limite des creux, et par conséquent la limite des flancs. De même si du point O comme centre et avec Oh pour rayon, on décrit une autre circonférence, celle-ci marquera dans la roue O la limite des creux, et par conséquent la limite des flancs. Le profil entier d'une dent étant tracé, qu'on imagine une ligne parcourant ce profil en restant perpendiculaire au plan de la roue, elle engendrera un cylindre formé d'une partie plane et d'une partie courbe; ce cylindre sera la dent de la roue. La partie plane est le flanc de la dent.

TRACÉ PRATIQUE DE L'ENGRENAGE A FLANCS.

Ordinairement les dents des engrenages sont très-petites, ce qui a pour effet d'atténuer les frottements; il résulte de là que chaque profil peut être regardé comme un arc de cercle ayant son centre quelque part sur la circonférence primitive

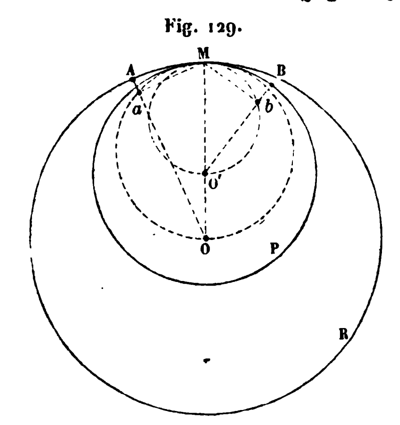
de la roue; donc si par le milieu de la corde $n\beta'$ on élè
perpendiculaire, et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontr
avec la circonférence, on aura le centre de l'arc à dé
alors si du point m et avec la corde mn pour rayon on
un arc de cercle, cet arc de cercle passera par les limite
β' de la dent, et se confondra sensiblement avec l'arc d'
cloïde. Les autres dents se traceront avec le même rayon

ENGRENAGE INTÉRIEUR.

L'engrenage à flancs intérieurs se trace comme le précé
seulement les flancs des dents de la roue sont matérielle
impossibles, ce qui rend inutiles les parties épicycloïdal
dents du pignon. Le pignon ne pourra donc pas condu
roue, du moins sous la condition que les rotations soie
raison inverse des rayons.

Supposons que les deux cercles pleins soient les circ
rences primitives de la roue et du pignon, puis décrivons
cercles sur OM et O'M (*fig.* 129) comme diamètres. Si
prend les deux arcs
MB, moindres que l
de l'engrenage, et q
tire les rayons OA, (
le point a sera le poi
contact d'un flanc c
roue avec la partie é
cloïdale de la dent d
gnon; b sera aussi le p
de contact d'une de
la roue avec un flan
pignon. Mais la parti

Fig. 129.



cycloïdale de la dent de la roue commence en A et se d
vers l'intérieur, donc la dent rend le flanc matériellemen
possible. Ainsi la partie courbe de la dent du pignon de
inutile, et même ici elle serait impraticable étant dirigée
l'intérieur.



Dans la *fig.* 130 la partie courbe de la dent du pignon est

Fig. 130.



dirigée au contraire du dedans au dehors, puisqu'elle est engendrée par le point M du cercle MBO roulant sur le pignon.

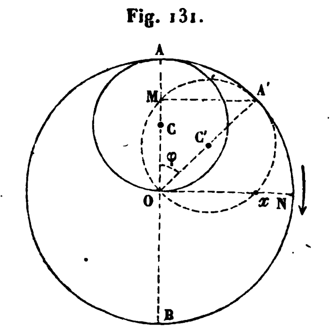
TAILLE DES ENGRENAGES A LA PLATE-FORME.

Concevons qu'on ait construit un burin B (*fig.* 128) sur le patron $zuz'u'$ d'un creux, et supposons qu'on fasse tourner ce burin avec une grande vitesse, autour d'un axe xy extérieur à la roue, mais de manière que le burin n'atteigne d'abord que le bord zu; si l'on conçoit que, pendant sa rotation autour de xy, le burin s'approche graduellement de la roue sans pouvoir dépasser $z'u'$, il est clair qu'il creusera le vide $zuz'u'$ compris entre deux dents consécutives. Ce premier vide étant taillé, on fera tourner d'un pas le plateau circulaire, ou la plate-forme, qui porte la roue; alors en mettant de nouveau le burin en mouvement, on taillera un deuxième creux, et ainsi de suite. Tel est le procédé qu'on emploie pour tailler les engrenages en cuivre. Au lieu d'un burin, on emploie aussi une petite roue appelée *fraise*, et dont la circonférence présente la coupe d'un creux de l'engrenage à exécuter. La fraise est particulièrement employée pour tailler les engrenages en fonte; elle tourne avec une petite vitesse.

MOUVEMENT RECTILIGNE PRODUIT PAR UN CERCLE QUI ROUL L'INTÉRIEUR D'UN CERCLE FIXE.

Quand un cercle donné roule dans l'intérieur d'un fixe, l'épicycloïde engendrée par un point quelconque du mobile peut dégénérer en une ligne droite. Sur le rayo (*fig.* 131) pris pour diamètre, décrivons le cercle C; f

Fig. 131.



rouler ce cercle dans l rieur du premier, et que le point A parcou diamètre AB. En effet, posons le cercle C pa en C', les arcs AA', M ront de même longueur, que l'arc AA' contient fois moins de degrés que A'M, et que ces degrés deux fois plus longs; donc pendant le roulement, le poi ne quittera pas le diamètre AB du cercle fixe. On pou se servir de cette propriété pour transformer un mouve circulaire continu ou alternatif en un mouvement recti alternatif. La vitesse du point M sera la projection sur AB vitesse du point de contact A'; si donc on désigne celle-ci p on aura pour la vitesse v_y suivant AB,

$$v_y = v \sin \varphi = v \frac{x}{R},$$

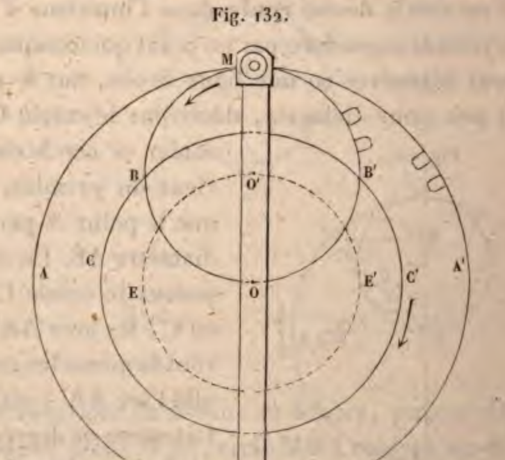
en posant, pour abréger,

$$OA = R, \quad A'M = x.$$

Le mouvement du cercle mobile étant uniforme, le mo ment du point M sera variable, et si l'on veut que ce mo ment s'approche de l'uniformité, il faudra faire mouvoi cercle mobile d'une petite quantité de chaque côté du point cela est évident. Pour produire le mouvement qui précède suffira d'armer les deux roues O et C d'un engrenage à fla Le mouvement que nous venons de décrire fonctionne dans

presses de M. Lefort, rue Esquermoise, à Lille, qui a bien voulu nous laisser visiter son établissement avec les élèves de la Faculté. Il est réalisé de la manière suivante (*fig.* 132) :

Fig. 132.



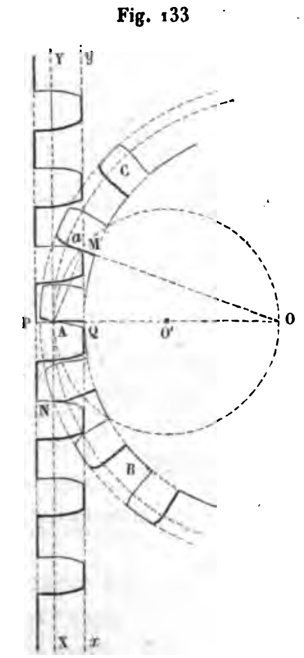
AA′ est une roue fixe armée d'un engrenage intérieur. BB′ est la roue mobile qui roule dans la première. Son rayon $O'M = \frac{1}{2} OM$. Au centre de la roue fixe, et au-dessous, tourne une roue CC′ qui reçoit le mouvement du moteur, et dont l'un des bras porte un axe O′ autour duquel la roue BB′ peut tourner. Enfin une tige MN s'articule avec BB′ en un point situé verticalement au-dessus du point M. Dès lors la rotation de CC′ produira le roulement de BB′, et cette dernière, à son tour, fera exécuter à la tige un mouvement rectiligne alternatif.

CRÉMAILLÈRE.

Soient BAC et XY (*fig.* 133) les circonférences et l'arête primitives de la roue et de la crémaillère. La ligne XY pouvant être regardée comme une circonférence dont le centre est à l'infini, l'engrenage dont il s'agit ne sera qu'un cas particulier de l'engrenage à flancs. Pour former la partie courbe des dents

de la crémaillère, il faudra donc tracer une circonfér

Fig. 133



cercle sur OA comme diamè faisant rouler cette circon sur XY, le point A engend profil d'une dent de la crém et ce profil sera un arc de cy La partie plane de la dent s'(dra en menant sur XY la p diculaire AP. De même po gendrer le profil d'une dent roue, il suffira de faire roul sur circonférence BAC; le p engendrera la partie courbe dent de la roue, et cet arc de (appartiendra à une développa cercle. Ainsi *les profils des de la crémaillère seront de. de cycloïde, ceux des den la roue des arcs de dévelop de cercle*. Ayant pris l'arc A(au pas de l'engrenage, on abaissera la droite AM perpen laire à Oa, et le point M sera la limite des dents de l maillère, lesquelles seront toutes terminées à la lign(parallèle à XY. De même, si l'on prend AN égale au p l'engrenage, le point n marquera la limite des dents (roue, lesquelles seront terminées à la circonférence d(du point O avec ON pour rayon. On peut remarquer en sant que si la roue mène la crémaillère, les dents de la glisseront constamment, à partir de A, sur le même poin dents de la crémaillère, lesquelles devront par conséq s'user plus vite que les premières. Q étant un point de situé un peu plus bas que la limite des dents de la crémail si l'on décrit du point O une circonférence avec OQ] rayon, cette circonférence limitera les creux de la roue. même, si par le point P situé un peu plus haut que la li des dents de la roue, on mène une parallèle à XY, (

parallèle limitera les creux de la crémaillère. Quant au nombre des dents, il se déterminera par la formule générale

$$n' = \text{ ou } > 10\left(1 + \frac{R'}{R}\right),$$

en y faisant $\frac{R'}{R} = 0$; ce qui donne

$$n' = \text{ ou } > 10.$$

Dans la figure précédente, on a pris

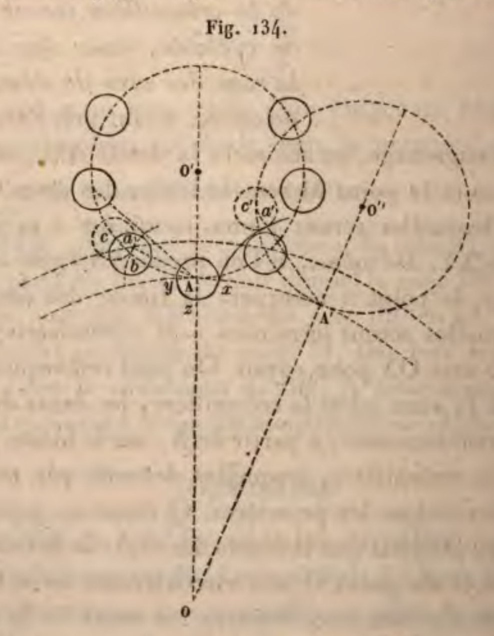
$$n' = 16.$$

Quant au nombre des dents de la crémaillère, il sera égal à sa longueur divisée par la grandeur du pas de l'engrenage.

ENGRENAGE A FUSEAUX OU A LANTERNE.

Soient O et O' (*fig.* 134) les circonférences primitives de la

Fig. 134.



roue et de la lanterne. Si nous prenons $\frac{R'}{R} = \frac{1}{3}$, la formule

générale

$$n' = \text{ ou } > 7 + 4\frac{R'}{R},$$

donnera pour la limite inférieure des dents du pignon,

$$n' = \text{ ou } > 8\frac{1}{3}.$$

Ayant choisi n', on aura ensuite

$$n = 3n'.$$

Prenant $n' = 9$, on trouve

$$n = 27.$$

Dans l'engrenage dont il s'agit, les dents de la roue ne glissent jamais que sur une petite portion du fuseau, qui doit par conséquent s'user plus vite que les dents de la roue. C'est pourquoi lorsque la roue et la lanterne sont de même matière, on donne aux fuseaux une largeur égale aux $\frac{4}{3}$ ou aux $\frac{5}{3}$ de celle de la dent. Ayant choisi pour la dent une certaine base, on la partagera, par exemple, en trois parties égales, et l'on portera deux de ces parties de chaque côté du point de côntact A des circonférences primitives de la roue et du pignon, puis avec Ax pour rayon on décrira la circonférence du fuseau. De chaque côté du point A on portera successivement le pas de l'engrenage, et des points ainsi obtenus on décrira des circonférences en prenant toujours Ax pour rayon; on aura ainsi les divers fuseaux du pignon. Pour tracer le profil de la dent de la roue, on fera rouler le cercle O', jusqu'en un point quelconque A', puis on prendra $A'c' = AA'$. Au point c' on décrira une circonférence avec Ax pour rayon, on joindra le point A' avec c', et la ligne ainsi menée sera normale à la circonférence c'; partant le point a' sera un point de la courbe cherchée. On voit que le point a' est l'intersection de deux arcs de cercles décrits des points A' et O, avec les rayons $A'a'$, Oa'. Mais pour avoir ces rayons il n'est pas nécessaire de décrire le cercle O'', il suffira de prendre $Ac = AA'$, de décrire le cercle c avec Ax pour rayon, et de joindre le point A au point c; les lignes Aa, Oa,

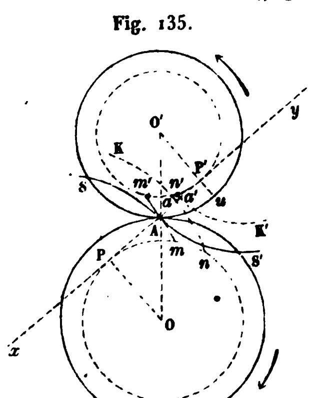
seront les rayons demandés. On déterminera ainsi tant de points qu'on voudra du profil de la dent. Si l'on veut que la dent de la roue conduise la lanterne jusqu'à la distance d'un pas, à partir de la ligne des centres, il suffira de prendre Ac égal au pas de l'engrenage augmenté de l'arc Ax. Du point c pris pour centre et avec Ax pour rayon, on décrira un fuseau, on joindra le point A au centre c de ce fuseau, et le point a ainsi déterminé sera le point où la dent cessera d'agir tangentiellement sur le fuseau. On devra donc limiter les dents de la roue à la circonférence de cercle décrite du point O avec Oa pour rayon. On voit que la dent de la roue ne frottera que sur la partie ab du fuseau. Les creux de la roue seront égaux à la demi-circonférence xzy.

Les fuseaux de la lanterne ne sont autre chose que des cylindres droits ayant pour bases les cercles de la figure, et encastrés dans deux plateaux circulaires qu'on nomme *tourteaux*. Quand l'uniformité du mouvement de la lanterne n'est pas nécessaire, on se contente de prendre pour dents de la roue des chevilles en bois qu'on nomme *alluchons*, encastrées dans sa circonférence, et qui sont arrondies à leurs extrémités.

ENGRENAGE A DÉVELOPPANTES DE CERCLES.

81. Soient O et O′ (*fig.* 135) la grande et la petite roue, et A le point de contact. Je mène par le point A une ligne quelconque xy, puis des centres O et O′, j'abaisse sur cette ligne les perpendiculaires OP, O′P′; enfin des points P et P′ je décris deux nouvelles circonférences en prenant pour rayons les perpendiculaires OP, O′P′. Cela posé, je fais rouler la tangente Py sur la circonférence OP, et je construis la développante mS décrite par le point A. Pareillement je fais rouler la

Fig. 135.



même tangente sur le cercle O′ P′, et je construis égalen développante m' S′ décrite par le même point A ; les deux bes ainsi tracées seront tangentes au point A. Mainten fais éprouver à la roue O une rotation qui transporte le m en n. Le point m' viendra en n', et je dis que les deux bes m S, m' S′ se toucheront encore en un certain point sécante xy. Soient ω et ω' les angles de rotations, on aur

$$mn = \omega . \mathrm{OP},$$

$$m'n' = \omega' . \mathrm{O'P'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{mn}{m'n'} = \frac{\omega}{\omega'} \cdot \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{O'P'}}.$$

Mais

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\mathrm{O'A}}{\mathrm{OA}};$$

d'un autre côté, la similitude des triangles rectangles O′ A′ P′ donne

$$\frac{\mathrm{O'P'}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{O'A}}{\mathrm{OA}},$$

donc aussi

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\mathrm{O'P'}}{\mathrm{OP}}.$$

Multipliant en croix, il vient

$$\frac{\omega . \mathrm{OP}}{\omega' . \mathrm{O'P'}} = 1.$$

Par conséquent

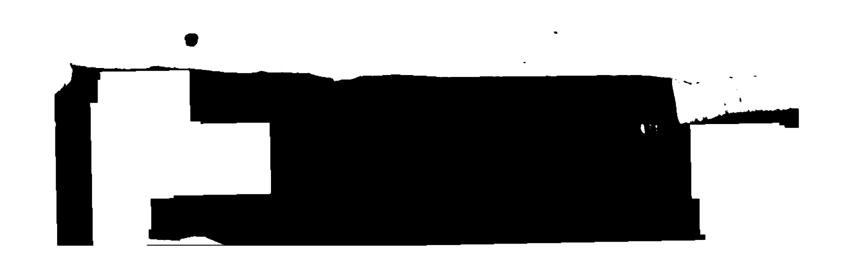
$$mn = m'n'.$$

Soient a le point où la développante n K vient couper la xy, et a' le point où la seconde développante n' K′ rencon même ligne, on aura

$$\mathrm{PA} + \mathrm{A}a = \mathrm{P}m + mn,$$

puisque n K est la développante décrite par le point a. Re chant de part et d'autre les termes égaux PA, Pm, il res

$$\mathrm{A}a = mn.$$



Par la même raison

$$Aa' = m'n', \quad \text{donc} \quad Aa = Aa';$$

ce qui fait voir que les deux points a et a' coïncident. Donc, pendant la rotation des deux roues, les deux dents mS, m'S', seront constamment tangentes, et le point de contact sera toujours situé sur la droite xy. Pour éviter que les courbes qui forment les profils de chaque dent ne convergent trop rapidement l'une vers l'autre, ce qui tendrait à les affaiblir vers leurs extrémités, on choisit la ligne xy de telle sorte qu'elle fasse le plus grand angle possible avec la ligne des centres. Pour atteindre ce but, on prendra sur la plus petite roue un arc Au égal au pas de l'engrenage, on abaissera du point A une perpendiculaire sur le rayon O'u, et l'on prendra la ligne xy, ainsi obtenue, pour base du tracé; comme les dents doivent se conduire jusqu'à la distance d'un pas avant et après la ligne des centres, on voit que si l'on prenait toute autre ligne située au-dessous de xy, la perpendiculaire abaissée du point O' tomberait à gauche de O'u, et la dent de la roue O ne conduirait plus la dent de la roue O' jusqu'à la distance voulue.

La figure ci-après représente un engrenage à développantes. On a pris

$$\frac{R'}{R} = \frac{2}{3}.$$

La substitution de cette valeur dans la formule générale

$$n' = \text{ ou } > 16 + 2\frac{R'}{R},$$

donne,

$$n' = \text{ ou } > 17\frac{1}{3}.$$

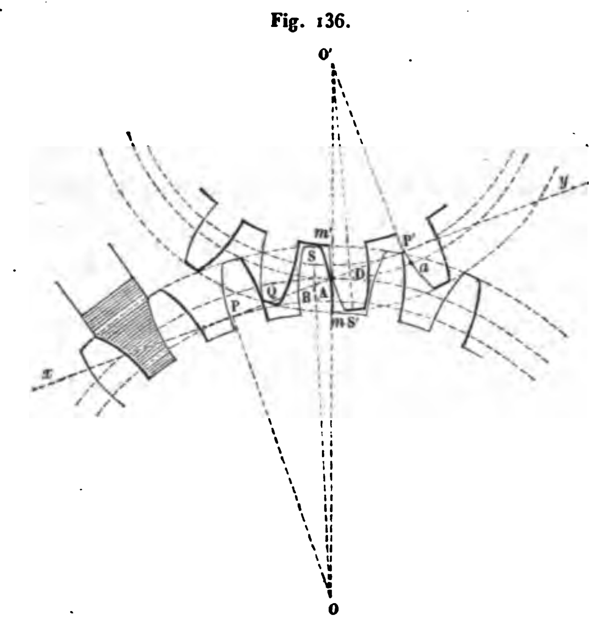
Adoptant $n' = 18$, on obtient ensuite

$$n = 27.$$

OA et O'A (*fig.* 136) étant les rayons des circonférences primitives des roues, on a pris, dans la petite circonférence,

arc A*a* égal au pas de l'engrenage; du point A l'on a mené *xy*

Fig. 136.



perpendiculaire au rayon O′P′; alors en faisant rouler *xy* successivement sur circonférence OP et sur circonférence O′P′, le point de contact A engendrera les profils des dents des deux roues. Ayant partagé les bases AB, AD des deux dents en deux parties égales, on joindra chaque milieu au centre du cercle correspondant, et l'on tracera ensuite les symétriques des deux profils *m*S, *m′*S′. Pour limiter les dents de la roue O, on décrira une circonférence du centre O avec OP′ pour rayon. De même pour limiter les dents de la roue O′, on décrira du point O′ une circonférence avec O′Q pour rayon. Quant au point Q, il est à l'intersection de la droite *xy*, et du profil de droite de la dent de la roue O, distante du point A du pas de l'engrenage.

ÉPAISSEUR DES DENTS DANS LES ENGRENAGES.

L'épaisseur *e* des dents estimée parallèlement à l'axe de rotation, et leur largeur *l* mesurée sur la circonférence primitive

de la roue, se déterminent ordinairement par les formules suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} e = 4l, & \text{si la vitesse ne surpasse pas } 1^{m},50 \text{ par seconde,} \\ e = 5l, & \text{si la vitesse dépasse } 1^{m},50, \\ e = 6l, & \text{si l'engrenage est mouillé d'eau.} \end{cases}$$

P étant la force qui fait tourner la roue, on prend ensuite

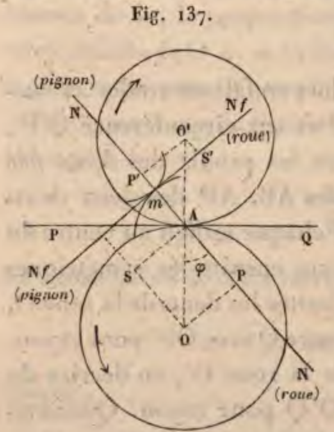
$$(2)\quad \begin{cases} l = 0,105\sqrt{P}, & \text{si les dents sont en fonte,} \\ l = 0,131\sqrt{P}, & \text{si elles sont en bronze,} \\ l = 0,145\sqrt{P}, & \text{si elles sont en bois dur.} \end{cases}$$

Dans ces formules, le centimètre est l'unité de longueur.

CALCUL DU FROTTEMENT DANS LES ENGRENAGES.

82. Je suppose connue la force P qui fait tourner la roue O (*fig.* 137), ou la force Q qui s'oppose au mouvement, estimée suivant la tangente au point A, et je me propose de déterminer : 1° celle de ces deux forces qui reste inconnue; 2° la pression normale N qui s'exerce au point de contact de deux dents; 3° la résistance $F = P - Q$, qui résulte du frottement des dents de l'engrenage. Je ferai remarquer d'abord que quelque grande que soit la perfection d'un engrenage, on ne peut guère admettre que l'effort se distribue entre plusieurs dents, car il faudrait pour cela que les dents fléchissent sous l'effort qu'elles supportent; or une telle flexion les exposant à la rupture, on leur donne une largeur assez grande pour éviter un inconvénient si grave. Nous admettrons donc que l'effort ne s'exerce qu'entre deux dents, et qu'il commence au moment où elles sont en prise sur la ligne des centres.

Fig. 137.



Les indications que porte la figure suffisent pour montrer quelles sont les forces qui agissent sur le système. Ainsi les forces qui sollicitent la roue O, sont P, N, Nf, et celles relatives à la roue O′, Q, N, Nf. Pour que chaque roue soit en équilibre sous l'action des forces qui la sollicitent, il faut et il suffit que la somme des moments de ces forces, pris relativement à l'axe de rotation correspondant, soit nulle; on aura donc pour la roue O, et en nommant R son rayon,

$$PR - N.OP - Nf(AP + Am) = 0.$$

Posant, pour abréger,

$$Am = p,$$

et observant que l'on a

$$OP = R\sin\varphi, \quad AP = R\cos\varphi,$$

la relation ci-dessus devient

$$(1) \qquad P = N\sin\varphi + Nf\left(\cos\varphi + \frac{p}{R}\right).$$

On a pareillement pour l'équation d'équilibre de la roue O′,

$$Qr = N.O'P' + Nf.O'S';$$

mais

$$O'P' = r\sin\varphi, \quad O'S' = AP' - Am = r\cos\varphi - p;$$

donc

$$(2) \qquad Q = N\sin\varphi + Nf\left(\cos\varphi - \frac{p}{r}\right).$$

On tire ensuite des équations (1) et (2)

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} N &= \frac{P}{\sin\varphi + f\left(\cos\varphi + \frac{p}{R}\right)}, \\ N &= \frac{Q}{\sin\varphi + f\left(\cos\varphi - \frac{p}{r}\right)}. \end{aligned}\right.$$

La première ou la seconde de ces formules fera connaître N, suivant que la force donnée sera P ou Q. Si, par exemple,

c'est la force P qui est connue, on aura pour la valeur de Q,

$$(4)\qquad Q = P\,\frac{\sin\varphi + f\left(\cos\varphi - \frac{p}{r}\right)}{\sin\varphi + f\left(\cos\varphi + \frac{p}{R}\right)}.$$

L'une ou l'autre des équations (3) fait voir que l'effort N est variable avec φ; *l'effort entre deux dents est donc variable dans les engrenages à flancs et à lanterne, tandis qu'il est constant dans l'engrenage à développantes de cercles.*

* Si l'on prend la dérivée par rapport à φ de l'une ou l'autre des équations (3), de la première par exemple, on reconnaît sans peine que N prend sa valeur minima pour

$$(5)\qquad \tang\varphi = \frac{1}{f};$$

d'où il suit que *l'effort qui s'exerce entre deux dents est un minimum, lorsque la normale à la dent fait, avec la tangente au point de contact des circonférences primitives des deux roues, un angle égal à l'angle du frottement.*

En retranchant Q de P, on trouve ensuite

$$(6)\qquad F = P\,\frac{fp\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\sin\varphi + f\left(\cos\varphi + \frac{p}{R}\right)}.$$

Remarquons maintenant que si les dents sont très-petites, ainsi que cela a lieu dans la pratique, φ différera très-peu de 90 degrés; alors si l'on pose

$$\varphi = 90^\circ - \psi,$$

ψ sera très-petit, et la formule (6) deviendra

$$F = P\,\frac{fp\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\psi + f\left(\sin\psi + \frac{p}{R}\right)}.$$

Si l'on remplace maintenant $\cos\psi$ par 1, $\sin\psi$ par 0, on aura,

aux quantités près du quatrième ordre par rapport à f, p

$$(7)\qquad F = Pfp\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right).$$

FROTTEMENT MOYEN.

Si nous remplaçons p par l'arc s, qui se termine au pi
la dent, et qui diffère très-peu de p, nous aurons

$$(8)\qquad F = Pfs\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right).$$

Partageons maintenant l'arc s en un nombre infini n de
ties égales; nommant ε l'une de ces parties, on aura

$$s = n\varepsilon.$$

Si l'on évalue les frottements qui répondent aux arcs ε, 2ε
$4\varepsilon, \ldots, n\varepsilon$, on trouve successivement :

$$F_1 = Pf\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

$$F_2 = 2Pf\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

$$F_3 = 3Pf\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n = nPf\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right).$$

Ajoutant toutes ces qualités membre à membre, et posant

$$F = \frac{F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n}{n},$$

il vient

$$F = \frac{1}{n}Pf\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)(1+2+3+\ldots+n),$$

ou, ce qui revient au même,

$$F = \frac{1}{2}Pf\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)(\varepsilon+s).$$

Négligeant le terme infiniment petit, on obtient enfin pou

[redacted]

valeur du frottement moyen,

$$(9) \qquad F = \frac{1}{2} P f s \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$$

Supposons que l'arc s soit égal au pas de l'engrenage ; alors

$$s = \frac{2\pi r}{n'}, \quad s = \frac{2\pi R}{n},$$

d'où

$$\frac{s}{r} = \frac{2\pi}{n'}, \quad \frac{s}{R} = \frac{2\pi}{n};$$

et au moyen de ces valeurs, l'équation (9) devient

$$(10) \qquad F = P\pi f \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right):$$

ce qui fait voir que *le frottement sera d'autant plus faible que les dents seront plus nombreuses.*

Si l'on veut avoir le travail du frottement moyen pendant le parcours d'un arc s, il suffira de multiplier le deuxième membre de l'équation (9) par s, ce qui donne

$$(11) \qquad \mathfrak{T} F = \frac{1}{2} P f s^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$$

Relativement au pas de l'engrenage, cette formule devient

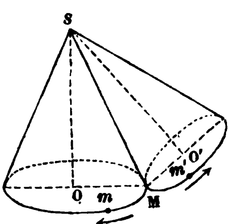
$$(12) \qquad \mathfrak{T} F = \frac{2 P \pi^2 f R}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

ENGRENAGES CONIQUES. — VIS SANS FIN. — ENGREN DE M. OLIVIER.

83. *Les engrenages coniques ont pour but de transf un mouvement de rotation autour d'un axe donné, mouvement de rotation autour d'un nouvel axe qui renc le premier.* Pour résoudre ce problème, concevons deux (*fig.* 138) ayant pour sommet commun le point d'interse des deux axes, et se touchant vant la génératrice SM. Si l'o prime au premier cône (S, C mouvement de rotation, cette tion se transmettra évidemm l'autre cône, et si le point transporte en m, ce même poi considéré comme appartenant

Fig. 138.



circonférence de base du deuxième cône, se transportera e certain point m' tel, qu'on aura

$$\text{arc}\, \text{M}m = \text{arc}\, \text{M}m'.$$

Alors si l'on nomme φ, φ', les angles de rotations qui répon aux arcs décrits, on aura

$$\text{arc}\, \text{M}m = \varphi . \text{OM}, \quad \text{arc}\, \text{M}m' = \varphi' . \text{O}'\text{M},$$

donc

$$\varphi . \text{OM} = \varphi' . \text{O}'\text{M};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\text{O}'\text{M}}{\text{OM}}:$$

ce qui fait voir que *les rotations des deux cônes sont en son inverse des rayons des sections circulaires qui répon*

au même point de leur arête de contact. Il suit aussi de là que *les vitesses angulaires de rotations sont entre elles dans le même rapport.* Par conséquent, *si le mouvement de l'un des cônes est uniforme, le mouvement de l'autre le sera aussi.*

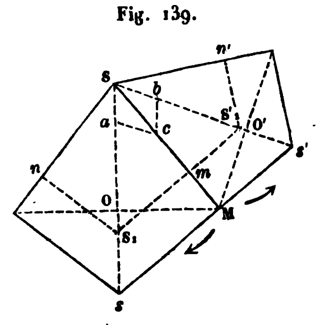
Mais ici, comme dans les engrenages cylindriques, la simple friction ne suffit pas toujours pour opérer la transmission du mouvement ; c'est pourquoi l'on arme les deux roues de dents telles, que la rotation se fasse comme par simple contact.

Cette transmission se fait dans ce cas par des surfaces coniques ayant pour sommet commun le point S. Les mêmes considérations, et la même solution générale du problème des engrenages plans s'appliquent aux engrenages coniques, de sorte qu'on peut se donner à volonté les dents de l'un des cônes, et en conclure la forme des dents du deuxième cône. Mais la solution théorique du problème des engrenages coniques n'est pas en usage dans la pratique, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas, me bornant à la solution purement pratique.

SOLUTION PRATIQUE DU PROBLÈME DES ENGRENAGES CONIQUES.

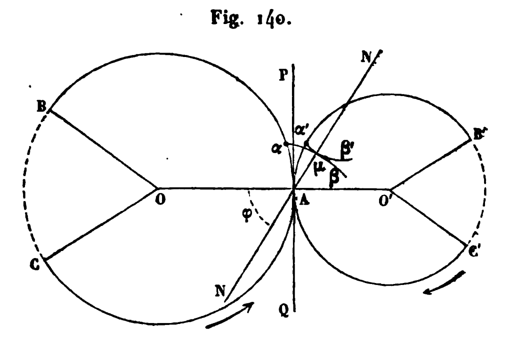
Soient (S, O), (S, O′) (*fig.* 139) les deux cônes proposés. Par un point quelconque M de l'arête de contact, je fais deux sections par des plans perpendiculaires aux axes SO, SO′; puis dans le plan de la figure, je mène ss' perpendiculaire à SM. Cela posé, je prends les points s, s' pour sommets de deux nouveaux cônes (s, O), (s', O′) ayant pour bases les cercles O, O′. Ces deux cônes auront un plan tangent ss' commun, lequel est perpendiculaire au plan de la figure. Imaginons maintenant que les deux cônes (S, O), (S′, O′) soient armés de dents engendrées chacune par le mouvement d'une droite qui, passant toujours par le point S, s'appuierait constamment sur une courbe donnée; les surfaces coniques de ces diverses

Fig. 139.



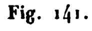
dents viendront marquer sur les cônes (s, O), $(s', O'$
courbe dentelée analogue à celle des engrenages plans; e
dant la rotation des deux cônes autour des axes Ss, S
éléments de ces divers profils viendront passer successiv
dans le plan tangent ss'; alors si l'on suppose que les deu
faces coniques (s, O), (s', O') aient une petite étendue
mune de chaque côté de ss', comme cela a lieu dans les
matériels exécutés par les soins de l'industrie, on en
clura que ces courbes, si elles sont très-petites, se press
en glissant l'une sur l'autre, dans la partie commune aux
surfaces coniques, et produiront la rotation des deux c
tangents en M, dont les rayons sont sM, s'M, et cela, cc
si ceux-ci étaient armés d'un engrenage plan; donc pou
tenir les dents des deux roues (s, O), (s', O'), il suffi
développer dans le plan tangent ss' les deux cônes auxil
(s, O), (s', O'), ce qui se fera en décrivant deux secteurs c
laires tangents, en prenant pour rayons sM, s'M, et en
donnant pour bases des arcs qui soient respectivement é
à circonférence OM et à circonférence O'M. Ces dévelc
ments sont représentés dans la *fig.* 140.

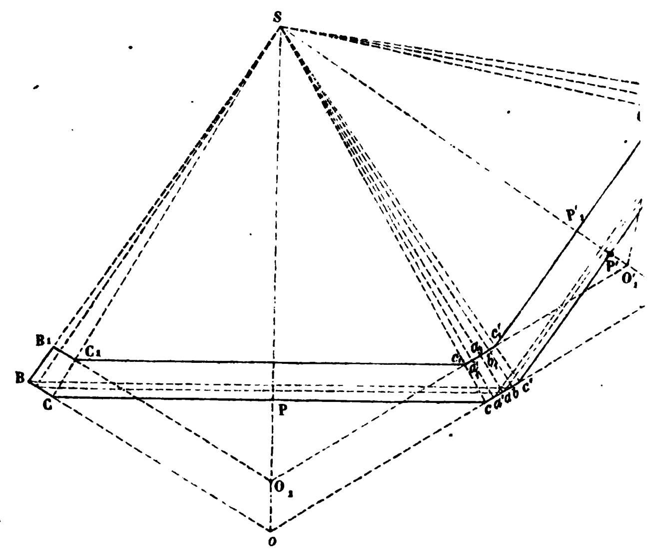
Fig. 140.



On armera d'un engrenage plan les deux secteurs O
ainsi obtenus, puis on enroulera chacun d'eux sur les c
cônes qui ont fourni ces développements, en faisant coïnc
la ligne OO' (*fig.* 140) avec ss' (*fig.* 139). Cela fait, en fai
mouvoir une ligne qui, passant toujours par le point S, s

Sa, les points O'_1, O'_1 seront les sommets des deux cô

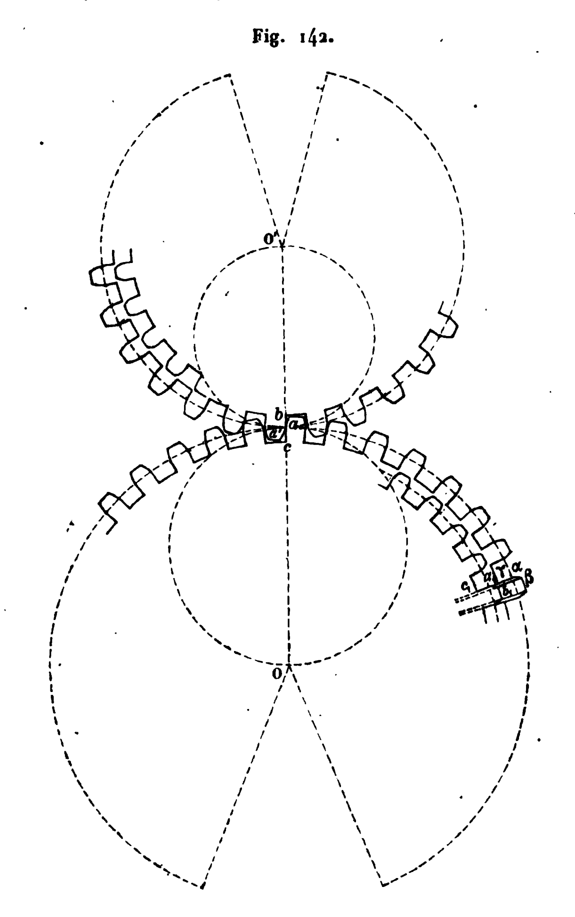

Fig. 141.



vant servir de limite aux dents du côté du sommet S
posé, je développe les deux cônes (o, P), (o', P′) com
le voit sur la *fig.* 142, puis sur les deux circonférence
obtenues, je trace un premier engrenage, par exemple u
grenage à flancs. Je développe aussi en O et O′ les deux
supérieurs, et je trace un deuxième engrenage qui sera
blable au premier; car, dans chaque roue, les points h
logues de deux dents correspondantes seront situés d
deux sur le même rayon. Tels sont les points β et b_1, α
γ et c_1, etc. Par conséquent, lorsqu'on aura tracé les co
des dents relatives à chaque cône inférieur, on en dé
sans peine celles relatives aux deux cônes supérieurs. Je p
maintenant sur la *fig.* 142 une ouverture de compas ég
O c, et je la porte sur la *fig.* 141 de o en c; en décrivant
circonférence sur le cône (o, P), en prenant le point o
pôle, et oc pour rayon, on aura la limite des creux; joig
S avec c, cette ligne coupera O_1 a_1 en un point c_1, qui
l'extrémité du rayon de la circonférence limitant les c

sur le cône supérieur. Une construction analogue faite sur le cône (o', P$'$) fera connaître les limites des creux dans la

Fig. 142.



deuxième roue. Je prends encore $ob = Ob$, et je joins le point b au point S; les circonférences décrites des points o et O_1 sur les cônes inférieur et supérieur de gauche, et avec les rayons ob, $O_1 b_1$, marqueront sur la première roue les limites des dents; pareillement, les circonférences analogues décrites des pôles o', O'_1 sur les cônes inférieur et supérieur de droite, marqueront les limites des dents sur la deuxième roue. On déterminera de la même manière les cercles où commencent

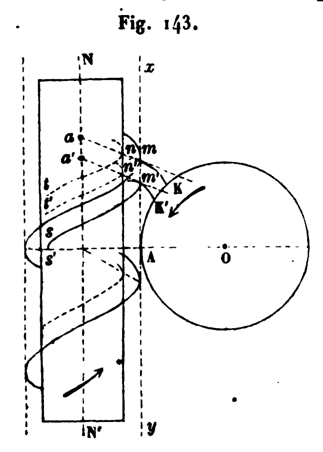
les parties courbes des dents. Si l'on mène ensuite les C_1c_1, $C'_1c'_1$, les figures $BCcbb_1c_1C_1B_1$, $B'C'c'a'$ a'_1c' seront les coupes des couronnes des deux roues. Le trac *fig.* 142 étant transporté sur les couronnes, les dents se ront sans difficulté.

ENGRENAGE DE LA VIS SANS FIN.

84. *La vis sans fin est une vis à filets carrés, qui transformer un mouvement de rotation autour d'un a un autre mouvement autour d'un autre axe qui lui e pendiculaire, mais qui ne le rencontre pas.*

Nous rappellerons que les deux faces supérieure et rieure de la vis sont engendrées chacune par une ligne p diculaire à l'axe du cylindre, et qui se meut sur une tracée sur ce cylindre. Cela posé, soient NN' (*fig.* 143) le

Fig. 143.



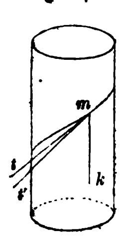
de la vis que nous suppo verticale, et ms, nt les l qui limitent la face inférie filet; enfin, soit O un cerc tical situé dans le même pl l'axe NN', et pouvant tourn tour d'un axe horizontal projette en O. Soit xy un nératrice du cylindre ext auquel la vis se termine; pourrons prendre xy pour trice d'une crémaillère, do flancs seraient les horizo mn, $m'n'$, etc.; alors si nous armons la circonférence O (veloppantes de cercles engendrées par des points de xy ro sur la circonférence O, ces développantes seront norm xy, et par conséquent tangentes à des génératrices de la vi par exemple, Km est une de ces courbes, rencontrant le m, de la face du filet, situé sur xy, cette courbe sera tan à la génératrice am, puisque cette courbe et la génér seront toutes deux normales à xy, et de plus situées da

éléments consécutifs qui répondent à ce point. Cela posé, nous démontrerons le théorème suivant :

Le plan osculateur en chaque point d'une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit, est normal au plan tangent au cylindre en ce point.

En effet, le plan osculateur passe par deux tangentes infiniment voisines, *mt*, *mt'* (*fig.* 145). Supposons que par le point *m* on ait mené des droites parallèles à toutes les tangentes à l'hélice ; ces droites ayant la même inclinaison sur les génératrices du cylindre, formeront un cône de révolution autour de l'arête *mk* du cylindre. Le plan des deux tangentes *mt*, *mt'* sera tangent à ce cône ; conséquemment, il sera perpendiculaire au plan qui contient la tangente *mt* et l'arête *mk*, car ce sera le plan diamétral du cône. Or ce plan *tmk* est tangent au cylindre ; donc *le plan des deux tangentes mt*, *mt'*, *c'est-à-dire le plan osculateur de l'hélice, est normal au plan tangent au cylindre.*

Fig. 145.



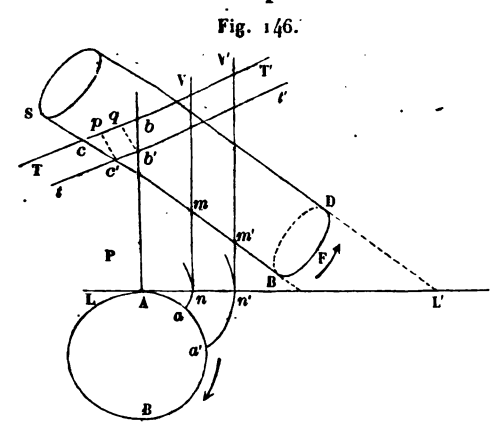
C. Q. F. D.

Concevons maintenant deux roues cylindriques pouvant tourner autour de deux axes fixes non situés dans le même plan. On veut transmettre à la deuxième roue le mouvement de la première. Dans l'engrenage que nous allons décrire, nous donnerons à la roue conductrice des dents ayant pour profils des développantes de cercles, tandis que les dents de la roue menée seront des portions d'une surface développable formée par les tangentes à une certaine hélice tracée sur la surface cylindrique de la roue menée.

Concevons deux cylindres circulaires ayant un plan tangent commun P (*fig.* 146), que l'axe du premier soit vertical, et l'axe du deuxième incliné à l'horizon. Dans le plan P menons une droite verticale, puis décrivons sur le deuxième cylindre une hélice qui soit inclinée sur les génératrices de ce cylindre d'une quantité égale à l'angle V*m*S. Si l'on fait tourner ce deuxième cylindre autour de son axe, les différents points de

l'hélice viendront se placer successivement dans le plan

Fig. 146.



P, et les t
à l'hélice vi
aussi success
se placer c
plan. Elles y
une directio
cale ; car elle
toutes avec l
ratrices du c
un angle égal
Ces diverses
tes forment u
face développable. Tout plan tangent à cette surface d
pable passe, comme on sait, par deux arêtes consé
c'est-à-dire par deux tangentes à l'hélice infiniment v
c'est donc le plan osculateur de l'hélice au point comm
deux tangentes. Ce plan est perpendiculaire au plan tan
cylindre mené par ce point de l'hélice, ainsi que nous
démontré plus haut. Cela posé, considérons le plan osc
à l'hélice en un point m, situé dans le plan vertical P;
osculateur est normal au plan P : d'une autre part, i
par la tangente à l'hélice au point m, laquelle est vertic
plan est donc le plan vertical normal au plan P. Or
osculateur est le plan tangent à la surface hélicoïdale ;
dans le mouvement du cylindre autour de son axe, t
plans tangents à la surface développable hélicoïdale vie
se placer perpendiculairement au plan vertical P qu'i
peront suivant des droites verticales.

Maintenant supposons que le premier cylindre soi
d'une dent an dont le profil soit une développante du
qui lui sert de base ; cette dent sera elle-même un cylind
tical, et ce cylindre sera toujours normal au plan ver
parce qu'une développante de cercle est toujours nor
toute tangente au cercle. Donc ce cylindre en tourna
toujours tangent à la surface développable hélicoïdal

touchera suivant les génératrices successives. Il poussera donc cette surface en s'appuyant sur elle à chaque instant dans toute l'étendue d'une génératrice, laquelle génératrice est, au moment du contact, dans une position verticale. Cette pression fera tourner le cylindre autour de son axe. Quand ce cylindre, qui forme une dent de la première roue, aura cessé de pousser la surface hélicoïdale qui forme une dent de la deuxième roue, deux autres dents semblables commenceront à être en prise. De la sorte, la transmission du mouvement se fera d'une manière continue, comme dans les engrenages coniques.

La rotation du deuxième cylindre autour de son axe, est à la rotation du premier, dans un rapport constant.

Supposons que le premier cylindre ait tourné de la quantité aa'; dans ce mouvement le point m a quitté le plan P, mais un autre point de l'hélice du deuxième cylindre est venu en m', et sa tangente est $m'V'$. Les deux points de l'hélice qui sont venus successivement se superposer en m, m', sont distants, sur les génératrices du deuxième cylindre, de la quantité mm'. Nommons φ la rotation de ce deuxième cylindre, r son rayon, et i l'angle que la tangente à l'hélice fait avec le plan de la base; on aura

$$mm' = r\varphi \operatorname{tang} i.$$

Mais

$$aa' = nn' = mm'.\cos i;$$

donc aussi

$$aa' = r\varphi \sin i.$$

Soit ψ la rotation du premier cylindre; on a, en nommant R son rayon,

$$aa' = R\psi;$$

donc enfin

$$r\varphi \sin i = R\psi,$$

d'où

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{R}{r \sin i}.$$

Par conséquent, si la rotation du premier cylindre est uniforme, la rotation du second le sera aussi.

Les deux cylindres pourraient aussi être armés de d
même espèce. En effet, traçons dans le plan tangent c
aux deux cylindres une ligne quelconque TT′, oblique
génératrices, puis enroulons librement cette ligne suc
ment sur chaque cylindre; enfin imaginons que chaq
soit armée d'une dent qui soit la surface hélicoïdale d
pable formée par les tangentes aux deux hélices; en
tourner les deux cylindres d'une quantité telle, que de
ments des deux hélicoïdes viennent se rencontrer au
point du plan tangent commun P, les génératrices en c
commun coïncideront, puisqu'elles seront parallèles à l
ligne TT′. Les plans tangents communs aux surfaces h
dales coïncideront aussi, comme étant perpendiculai
même plan P, et menés suivant la même droite.

*La rotation du deuxième cylindre autour de son ax
la rotation du premier, dans un rapport constant.*

Supposons que la rotation ait amené le contact à se fai
vant tt'; ψ et φ étant les rotations correspondantes du pre
du deuxième cylindre, R et r leurs rayons, α et β les ang
la tangente à chaque hélice fait avec le plan de la base
lindre sur lequel elle est tracée, on aura

$$\begin{cases} cc' = r\varphi \operatorname{tang} \beta, \\ bb' = R\psi \operatorname{tang} \alpha, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{cc'}{bb'} = \frac{r\varphi \operatorname{tang} \beta}{R\psi \operatorname{tang} \alpha}.$$

Mais on a aussi

$$cc' = \frac{c'p}{\cos \beta}, \quad bb' = \frac{b'q}{\cos \alpha};$$

de là on tire

$$\frac{cc'}{bb'} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Égalant les deux valeurs du rapport $\frac{cc'}{bb'}$, et réduisant, i

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{r}{R} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \qquad \text{C. Q.}$$



On voit par là que si l'on choisit TT' de manière que cette ligne fasse le même angle avec les génératrices des deux cylindres, on aura simplement

$$\frac{\psi}{\varphi}=\frac{r}{R}.$$

De sorte que, dans ce cas, les *rotations seront en raison inverse des rayons des deux roues.*

On voit fonctionner cet engrenage dans une des plates-formes qui servent à tailler les engrenages à la fraise, chez M. Vennin, constructeur de métiers à filer le lin, rue Princesse, à Lille.

CALCUL DU FROTTEMENT DANS LES ENGRENAGES CONIQUES.

86. La théorie générale du frottement dans les engrenages est une application de la composition des rotations. Soient SO, SO' (*fig.* 139) les axes des deux roues, $OM=R$, $O'M=r$ les rayons de leurs circonférences primitives, et φ l'angle OMO' compris entre les plans de ces circonférences; l'angle φ qui se compte de 0 à 180 degrés est évidemment le supplément de l'angle des deux axes. Soit aussi V la vitesse au point M; la vitesse angulaire de la roue O sera $\frac{V}{R}$, celle de la roue O' aura pour valeur $\frac{V}{r}$. Supposons pour fixer les idées que la roue O tourne de droite à gauche pour un observateur qui aurait l'œil au point s; la roue O', vue du point s', tournera en sens inverse. Cela posé, imprimons aux deux roues un mouvement commun de rotation autour de l'axe SO, avec une vitesse angulaire qui soit égale à $\frac{V}{R}$ et de sens contraire; de la sorte la roue O sera réduite au repos, tandis que la deuxième roue O' sera animée de deux rotations de même sens $\frac{V}{R}$, $\frac{V}{r}$ autour des axes SO, SO'. Pour composer ces deux rotations en une seule, je porte sur les axes SO, SO' deux longueurs Sa, Sb qui soient respectivement égales aux deux vitesses angulaires ci-dessus;

en vertu du théorème de la page 24, la diagonale Sc
rallélogramme $Sabc$ représentera, en direction, l'axe
duquel se fera la rotation résultante, dont la vitesse a
sera égale à cette même diagonale. Je dis maintenant
sera dirigée suivant SM. En effet, les triangles aSc, b
nent

$$\frac{Sa}{ac} \quad \text{ou} \quad \frac{V}{R} : \frac{V}{r} = \frac{\sin bSc}{\sin aSc};$$

et en réduisant

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin bSc}{\sin aSc}.$$

D'un autre côté on a, en considérant les triangles rec
O'SM, OSM,

$$O'M = SM.\sin MSO',$$

$$OM = SM.\sin MSO;$$

de là on tire

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin MSO'}{\sin MSO}.$$

Mais

$$aSc + cSb = OSM + MSO',$$

par conséquent

$$aSc = OSM \quad \text{et} \quad cSb = MSO'.$$

Donc si l'on nomme Ω la vitesse angulaire résultante, o

$$(1) \qquad \Omega = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\varphi}{Rr}}.$$

Ainsi le mouvement relatif de la roue O' par rapport à la
O est le même que si le cône (S, O') roulait sans glisser
cône (S, O) avec la vitesse angulaire ci-dessus.

Soient $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ les deux dents en prise (*fig.* 140); la
male commune à l'élément superficiel de contact des
dents viendra rencontrer, et sera perpendiculaire à la gé
trice suivant laquelle les deux cônes se touchent; mais les
dents se poussent à très-peu près dans le plan tange
(*fig.* 139) ou dans le plan de la figure 140, on pourra

prendre $A\mu$ pour cette normale. Il résulte de là que la pression normale N entre deux dents aura la même valeur qu'au n° 80, savoir,

$$N = \frac{P}{\sin\varphi}, \tag{2}$$

en négligeant le deuxième terme du dénominateur. Maintenant soit F la résistance au mouvement, estimée suivant la tangente au point A, et provenant du frottement entre les dents. Si s est l'élément infiniment petit de la circonférence O' qui s'applique pendant l'instant τ sur un arc égal de la circonférence O pendant le mouvement effectif du système, le travail élémentaire de la force F sera Fs, et ce travail sera égal à celui du frottement Nf qui naît de la pression N. Nommant p la perpendiculaire $A\mu$, le glissement de la dent $\alpha'\beta'$ sur la dent $\alpha\beta$ sera $\Omega p \tau$, et le travail correspondant aura pour valeur $Nf\Omega p\tau$. Égalant ces deux expressions du travail élémentaire du frottement, il vient

$$Fs = Nf\Omega p\tau.$$

Remplaçant Ω et N par leurs valeurs précédentes, on trouve

$$Fs = \frac{Pfp\tau V}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\varphi}{Rr}}.$$

Mais

$$s = V\tau;$$

donc

$$F = \frac{Pfp}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\varphi}{Rr}}. \tag{3}$$

Comme dans la pratique φ diffère très-peu de 90 degrés, on peut supposer $\sin\varphi = 1$; en même temps p diffère très-peu de l'arc S parcouru par le point A, pendant que les deux dents se poussent depuis le point A jusqu'à une position quelconque; on peut donc prendre pour la valeur de F

$$F = PfS\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\varphi}{Rr}}. \tag{4}$$

Cette formule coïncide avec la formule (8) du n° 80 quand on

y fait $\varphi = 180^\circ$. On trouve ensuite, comme au numé
que le frottement moyen a pour valeur

$$(5) \qquad F = \frac{1}{2} Pf S \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\varphi}{Rr}}.$$

Si l'on prend S égal au pas de l'engrenage,

$$S = \frac{2\pi R}{n}, \quad S = \frac{2\pi r}{n'},$$

d'où

$$\frac{S}{R} = \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{S}{r} = \frac{2\pi}{n'},$$

par suite la formule (5) devient

$$(6) \qquad F = \pi P f \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\varphi}{nn'}}.$$

Ce qui fait voir que *le frottement est d'autant plus f*
que les dents sont plus nombreuses.

TRAVAIL ABSORBÉ PAR LE FROTTEMENT.

Si l'on veut avoir le travail dû au frottement moyen
dant le parcours d'un arc S, il suffira de multiplier pa
deuxième membre de l'équation (5), ce qui donne

$$(7) \qquad \mathcal{T}F = \frac{1}{2} Pf S^2 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\varphi}{Rr}}.$$

ϖ étant le pas de l'engrenage, si l'on fait $S = \varpi$, cette for
devient

$$(8) \qquad \mathcal{T}F = \pi P f \varpi \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\varphi}{nn'}}.$$

La formule (6) fait voir que le frottement augmente d
$\varphi = 0$ où il est le plus petit, jusqu'à $\varphi = 180^\circ$ où il est le
grand. *Le frottement est donc le plus faible dans l'er*
nage plan intérieur, le plus grand dans l'engrenage
extérieur.

Pour que les formules précédentes soient exactes, il faut supposer que R et r se rapportent au milieu de la longueur de la dent, estimée suivant la génératrice de contact des deux cônes primitifs.

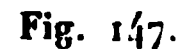
Si l'on veut avoir plus de détails sur le calcul des frottements dans les engrenages, on pourra consulter un Mémoire remarquable de M. Combes, inséré au *Journal* de M. Liouville, tome II, page 109, d'où la théorie précédente a été extraite, du moins à la forme près.

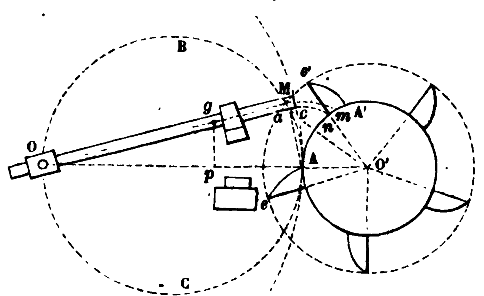
VINGT-TROISIÈME LEÇON.

TRANSFORMATION DES MOUVEMENTS.

CAMES POUR SOULEVER DES MARTEAUX ET DES PILON

87. Quand une roue ne porte que quelques dents, ce
prennent le nom de *cames*. Soit proposé de soulever un
teau ou un foulon OM (*fig.* 147), tournant autour d'un


Fig. 147.



La ligne Oc pourra être considérée comme le flanc d'une
ayant pour rayon Oc = OA ; alors en décrivant une circ
rence O'A tangente à la première, il suffira d'armer celle
dents ayant pour profils des épicycloïdes ; l'une d'elles Ae
engendrée par le point A du cercle ABOC roulant sur le c
O'. Soit Oc une position voisine de la position la plus él
du marteau ; en menant Aa perpendiculaire à Oc, on a
pour cette position, le point de contact de la dent et du mart
de sorte que pour conduire le marteau jusqu'en Oc, la
devra glisser sur la partie ca du flanc. Je limite la den
décrivant une circonférence du point O' avec O'a pour ra
On remarquera maintenant que lorsque la dent Ae sera
venue en na, on aura

$$\text{arc A}n = \text{arc A}c;$$

mais comme le marteau tend à retomber, la dent ne l'abandonnera pas encore, elle le soulèvera jusqu'en OM, en agissant par sa pointe qui glissera sur le flanc de *a* vers *c*.

Pendant cette période, le mouvement du marteau ne sera pas proportionnel à celui de la roue, puisque le flanc ne sera plus poussé par l'épicycloïde. Si du point M, pris pour centre, on coupe la circonférence O′ en prenant pour rayon corde A*e*, on marquera le point *m* où se trouvera la dent au moment où elle laissera tomber le marteau. Mais dès que le marteau sera tombé, il faut qu'une autre dent vienne le saisir; donc si la chute du marteau était instantanée, l'arc A*m* serait l'intervalle entre deux dents consécutives, pourvu toutefois qu'il fût une partie aliquote de la circonférence. En portant arc A*m* sur circonférence O′, on reconnaît qu'il y est contenu cinq fois avec un reste; on pourra donc prendre pour intervalle entre deux dents le cinquième de circonférence O′, et donner ainsi cinq dents à la roue. Le petit arc *m* A′ représente ici la rotation de la roue pendant la chute du marteau. On ne trace qu'un seul profil épicycloïdal, l'autre étant inutile.

Pour calculer l'arc α décrit pendant la chute du marteau, nommons g le centre de gravité de celui-ci, t le temps de la chute, et v la vitesse de la roue; le mouvement étant supposé uniforme,

$$\alpha = vt; \tag{1}$$

posant $gp = h$, on aura, à peu près,

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \tag{2}$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad [\textit{voir} \text{ page 257, formule (6)}],$$

par suite

$$\alpha = v\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{3}$$

Ajoutant cet arc à l'arc A*m*, il vient

$$x = \text{arc A}m + \alpha.$$

Si l'arc x ainsi calculé était une partie aliquote de la circonférence O', il serait l'espace entre deux dents; mais il n'en sera ainsi que par hasard : alors on divisera circonférence O par l'intervalle ci-dessus, et l'on prendra pour nombre de dents la partie entière du quotient obtenu. On aura de la sorte un intervalle un peu plus grand qu'il n'est nécessaire pour tenir compte de la chute du marteau. Supposons $v = 0^m{,}06$ (nous prenons une vitesse très-petite, afin qu'elle puisse s'adapter à la figure précédente); ayant mesuré sur une échelle très-serrée les quantités h, arc Am, et O'A = R, je trouve, par exemple,

$$h = 0^m{,}0169,\quad R = 0^m{,}026,\quad Am = 0^m{,}0276.$$

Avec ces données, la formule (2) donne

$$t = 0^s{,}0587;$$

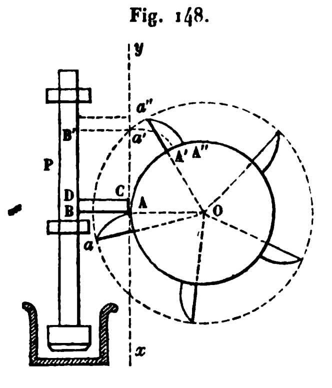
on a ensuite

$$\alpha = 0^m{,}0035,\quad Am + \alpha = 0{,}0311,\quad \frac{2\pi R}{Am + \alpha} = 5{,}25.$$

Il faut donc prendre 5 pour nombre de cames. Alors l'intervalle entre deux dents consécutives sera $0^m{,}0327$.

88. Soit proposé de soulever un pilon P (*fig.* 148) au moyen d'une roue OA tournant autour du centre O. Prolongeant le côté AC du mentonnet sur lequel la dent doit agir, on pourra regarder xy comme étant la directrice d'une crémaillère dont le flanc serait AB; partant, la dent qui soulèvera le pilon aura pour profil une développante de cercle décrite par le point A de la tangente Ax roulant sur circonférence OA. Soit Aa' la course du pilon. La dent Aa devant quitter celui-ci en a'B', elle aura pris alors une position A'a' telle, que arc AA' = Aa'; donc si du point O pris pour centre, et avec

Fig. 148.



Oa' pour rayon, on décrit une circonférence, cette circonférence limitera toutes les cames; par conséquent si la chute du pilon était instantanée, et si AA' était une partie aliquote de la circonférence OA, l'arc AA' serait l'intervalle entre deux dents. Pour avoir le nombre de cames, on ajoutera à cet arc l'arc décrit par la roue pendant la chute du pilon ; on divisera circonférence OA par le résultat obtenu, et l'on prendra la partie entière du quotient pour le nombre de cames; de la sorte, dès que le pilon sera tombé, une autre dent viendra bientôt après le soulever.

Soient v la vitesse de la roue, t le temps de la chute du pilon; posant $Aa' = h$, $OA = R$, on trouve d'abord, par exemple,

$$h = 0^m,0314, \quad R = 0^m,033.$$

Calculant ensuite le temps de la chute par la formule

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

on obtient

$$t = 0^s,08.$$

Prenant pour vitesse de la roue

$$v = 0^m,04,$$

on trouve successivement :

$$vt = 0^m,0032,$$
$$h + vt = 0^m,0346,$$
$$2\pi R = 0,2073,$$
$$\frac{2\pi R}{h + vt} = 5,9.$$

On devra donc prendre pour le nombre n de cames,

$$n = 5.$$

Alors l'intervalle α entre deux dents consécutives aura pour valeur

$$\alpha = 0^m,0414.$$

Connaissant la course h du pilon, le nombre N *de t*
la roue doit faire en une minute, et le nombre n d
qu'on se propose de lui donner, on peut calculer le r
celle-ci, de manière qu'il n'y ait pas d'intervalle
chute et l'instant où la came viendra saisir le pilon. I
on aura pour déterminer R,

$$2\pi R = n(h + vt). \tag{1}$$

Soit ω la vitesse angulaire de rotation; la vitesse absol
point de la circonférence de la roue sera

$$v = R\omega = \frac{\pi RN}{30};$$

par suite, l'équation ci-dessus deviendra

$$2\pi R = n\left(h + \frac{\pi RN}{30}t\right):$$

d'où l'on tire, en remplaçant t par sa valeur,

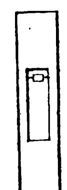
$$R = \frac{nh}{2\pi - \frac{\pi N n}{30}\sqrt{\frac{2h}{g}}}. \tag{2}$$

Toutefois le nombre des cames de la roue ne sera
tièrement arbitraire, attendu que R devant être posi
nombre n aura pour limite

$$n < \frac{60}{N}\sqrt{\frac{g}{2h}}. \tag{3}$$

Au lieu de faire agir la came sur un mentonnet, on
souvent dans la tige du pilon u
verture (*fig.* 149) dans laquelle
entrer la came. On évite ainsi le
tements dus aux pressions latérale
tre les *guides* ou *prisons*. On peut
mettre un galet dans la tige évid
pilon.

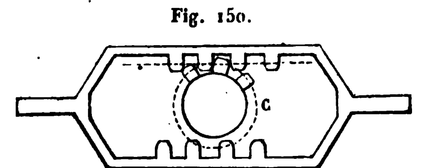
Fig. 149.



DIVERS MODES DE PRODUIRE DES MOUVEMENTS RECTILIGNES ALTERNATIFS.

89. Entre deux crémaillères parallèles et rendues solidaires d'une manière quelconque, on fait tourner une roue n'ayant que quelques dents (*fig.* 150); cette roue imprimera évidemment au système un mouvement rectiligne alternatif, dont la course sera égale à l'arc de la circonférence primitive occupée par les dents de la roue, lesquelles sont ici des développantes.

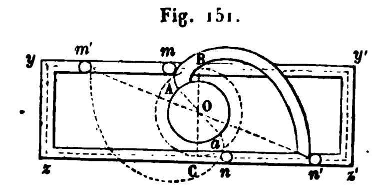
Fig. 150.



Si l'on veut qu'il n'y ait pas d'interruption, après chaque course, il faudra prendre la circonférence primitive égale au double de cette course, et mettre des dents sur toute la demi-circonférence. Alors quand la dernière dent aura cessé de pousser d'un côté, la première dent commencera à être en prise de l'autre.

On a un châssis (*fig.* 151) auquel il faut imprimer un mouvement de va-et-vient à l'aide d'une came fixée sur une roue O; soient mm' la course du châssis, et m la position initiale du galet supérieur sur lequel doit agir la came. Si nous prenons yy' pour directrice d'une crémaillère, en faisant rouler la tangente my' sur circonférence OA, le point m du galet situé sur yy' engendrera une développante qui sera normale à yy', quelle que soit la position que la rotation lui fasse prendre; donc elle poussera le galet dans la direction mm'. En même temps le galet n' s'avancera vers n où il arrivera en même temps que le galet supérieur en m'. Maintenant, si du point O pris pour centre, et avec Om' pour rayon, on décrit un arc de cercle, cet arc de cercle marquera la limite n' de la came, et si l'on donne au châssis une largeur telle que circ. $OA = 2\,mm'$,

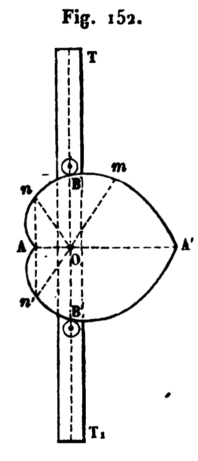
Fig. 151.



lorsque le point m sera arrivé en m', le point A aura pa
une demi-circonférence et sera venu se placer en a ; d'u
côté, comme $Cn = Bm$, la came sera en prise avec le g
au moment même où elle quittera le galet supérieur. Ell
sera donc le galet inférieur jusqu'en n', et ainsi de su
plus, le mouvement du châssis sera uniforme si le mouv
de la roue lui-même est uniforme.

On veut imprimer un mouvement de va-et-vient à la ti
(*fig.* 152), en faisant tourner autour du point O une
en cœur, formée de deux portions
triques d'une spirale d'Archimède
BB′ la distance constante des deux
B, B′, sur lesquels la courbe doit g
On sait que dans la spirale d'Arch
la différence de deux rayons vecteu
la même que la différence de deux
rayons vecteurs qui comprennent le
angle que les premiers (page 320)
près cela, pour deux rayons ve
Om, On également inclinés sur B
aura

Fig. 152.



$$OB - On = Om - OB,$$

d'où l'on tire

$$2\,OB = BB' = Om + On.$$

Mais

$$On = On',$$

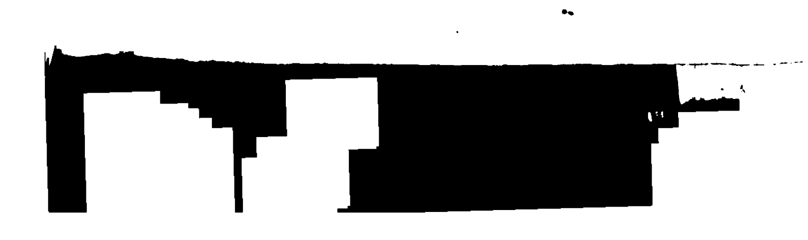
en vertu de la symétrie de la figure ; donc

$$Om + On' = BB'.$$

D'un autre côté, les angles BOm, $B'On'$ sont égaux ; pa
séquent la droite On' est le prolongement de Om ; donc

$$mn' = BB'.$$

Ainsi toutes les cordes qui passent par le point O *sont é*
d'où il résulte que, dans toutes ses positions, le cœur
s'interposer entre les deux galets B, B′. Il est évident
rotation fera exécuter à la tige TT_1 un mouvement rec



alternatif, et ce mouvement sera uniforme, si le cœur se meut lui-même d'un mouvement uniforme; car pour deux rotations égales, la tige s'avancera de la différence des rayons vecteurs correspondants. Quant à la course c de la tige, elle aura pour valeur

$$c = OA' - OA.$$

TRACÉ DE L'EXCENTRIQUE EN CŒUR.

On suppose connues :

1°. La course c que doit produire l'excentrique;

2°. La distance constante l des deux galets.

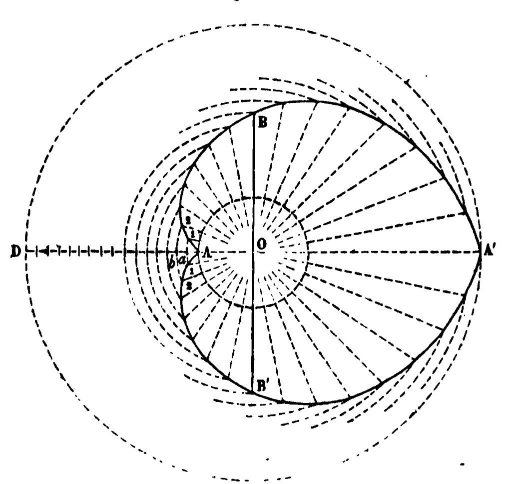
Si l'on admet pour un instant que la courbe soit tracée (*fig.* 153), on aura

$$OA' + OA = l, \quad OA' - OA = c,$$

d'où l'on tire

$$OA' = \frac{1}{2}(l + c), \qquad OA = \frac{1}{2}(l - c).$$

Fig. 153.



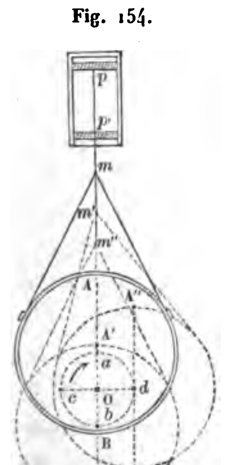
Par conséquent, si l'on prend $AD = c$, le point O sera le milieu de A'D. Traçons maintenant une ligne indéfinie, prenons sur cette ligne $AA' = l$, et portons à la suite $AD = c$; les points A' et A seront les deux sommets de la courbe. Du milieu

O de A′D je décris ensuite une circonférence, puis cette circonférence, ainsi que AD, en un même n parties égales, par exemple en 16; cela fait, si du comme centre je décris un arc de cercle avec O*a* poı les points où cet arc de cercle 1*a*1 coupera les deı vecteurs O1, appartiendront à la courbe; pareille points où l'arc de cercle 2*b*2 coupera les deux ray teurs O2, feront partie de la courbe, et ainsi de su centrique en cœur est employé dans la plupart des filer le lin, pour élever et abaisser le banc à broches. entre autres ceux de M. Vennin, constructeur à Lille.

EXCENTRIQUE CIRCULAIRE.

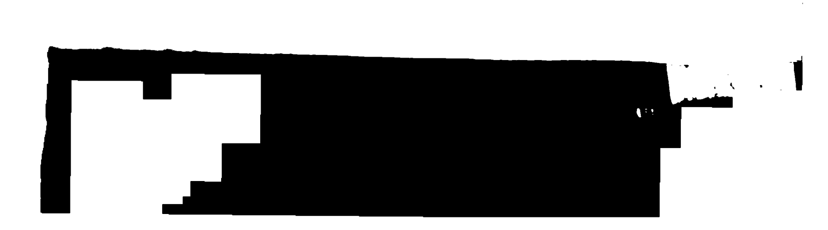
Soit O un axe de rotation (*fig.* 154). On monte su un double anneau, mais par un point autre que le cenı

Fig. 154.



neau intérieur peut glisser en dans le premier. De la circonfé l'anneau extérieur partent deux tig relie d'une manière quelconque viennent s'articuler, par exemple tige d'un piston *mp*. Considérons trique dans la position AB; alors est en *a*, et le piston qu'il dir position *mp*. La rotation autour d se faisant dans le sens de la flèch centre *a* restant toujours à la mé tance de l'axe O de rotation, le décrira la circonférence *adbc*. Q centre *a* sera parvenu en *d*, l'exce aura pris la position A″B″, et le sera descendu de la quantité *mm*′ La rotation continuant, le centre mobile arrivera e alors l'excentrique aura pris la position A′B′; en mêm le piston aura parcouru le nouvel espace $m'm'' =$ course entière du piston sera donc

$$mm'' = ab.$$

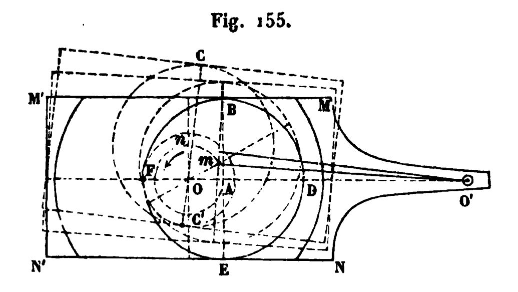


Ainsi *la course, due à l'excentrique, est égale au diamètre de la circonférence décrite par son centre*. La rotat ion con nuant, le piston remontera, et ainsi de suite.

EXCENTRIQUE SIMPLE.

Soient un châssis rectangulaire (*fig.* 155) pouvant tourner autour d'un axe O', et O un axe de rotation sur lequel est monté

Fig. 155.



un excentrique circulaire BDEF, dont le centre décrit la circonférence A*mn*. Lorsque par l'effet du mouvement autour du point O, le centre A de l'excentrique sera venu en *m*, le rectangle MN M'N', qui est mobile autour du point O', touchera l'excentrique en deux points situés sur la perpendiculaire menée du point *m* sur O'*m*, et l'angle AO'*m* sera l'angle d'écart. Quand le centre A sera parvenu en *n*, le rectangle touchera le cercle mobile en CC', et l'angle d'écart maximum sera OO'*n*; de l'autre côté de OO', l'écart maximum sera le même.

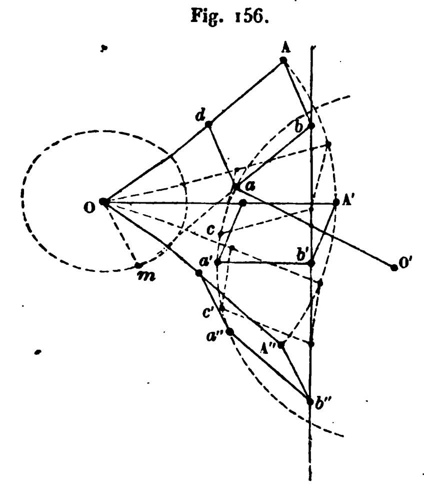
Le mouvement circulaire alternatif autour de O' peut à son tour être changé en un mouvement rectiligne alternatif. Un excentrique de cette espèce est employé à mouvoir la pompe à air de la machine à vapeur de M. Fiévet, constructeur de machines à vapeur à Esquermes, qui a bien voulu nous laisser visiter son établissement avec les élèves de la Faculté.

PARALLÉLOGRAMME DE WATT.

90. Considérons un demi-balancier OA (*fig.* 156) pouvant osciller autour du centre O, et construisons sur OA un parallélogramme articulé. Si nous attachons le point *b* à la tige d'un

piston assujetti à décrire une droite bb'', le point a, pe

Fig. 156.



mouvement du ba décrira à très-p une circonférence cle $aa'a''$. Donc quement, si l'on a le point a à déc circonférence aa' passe par les troi tions que prend le a dans les excursi trêmes et moyenne lancier, en articu point a au centre une *bride* $O'a$, l b décrira la ligne droite bb''.

COURBE A LONGUE INFLEXION.

Rigoureusement parlant, le sommet b du parallélog ne parcourt pas une ligne droite, mais bien une cou forme de 8 qu'on nomme *courbe à longue inflexion*, une portion diffère peu de la ligne droite. Pour trou mode de génération plus simple que le précédent, meno parallèle à Ab, et nous aurons

$$Om = Ab = \text{constante};$$

donc le point m parcourt une circonférence de cercle. M a aussi

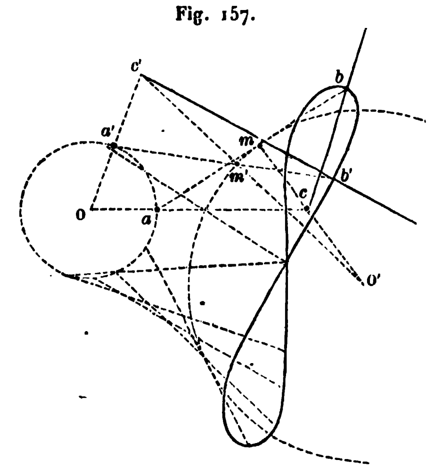
$$ma = mb - ab = OA - Ad = \text{constante}:$$

d'ailleurs le point a décrit également une circonférence la courbe proposée peut aussi être engendrée par un poin droite, dont deux points fixes sont astreints à rester su circonférences de cercles.

Nous avons construit ci-après (*fig* 157) la courbe gue inflexion décrite par le point b de la figure précéden

lignes pointillées représentent diverses positions de la droite *mb*; on voit que la courbe obtenue n'est sensiblement rectiligne que dans une certaine étendue. De là il suit que dans l'établissement du parallélogramme de Watt, il sera nécessaire de construire cette courbe, afin de ne pas donner à la course du piston une étendue plus grande que la partie rectiligne de la courbe décrite; sans cela on expose la machine à des ébranlements toujours nuisibles.

Fig. 157.



Si l'on veut mener une normale à la courbe précédente par un point donné b, on mènera la génératrice ab, laquelle s'appuie sur les deux circonférences aux points a et m, on tirera les rayons Oa, $O'm$, et le point de rencontre c de ces rayons sera le centre instantané de rotation de la droite mobile pour la position ab; par conséquent, en joignant le point c au point b, on aura la normale demandée.

Nous avons construit de la même manière la normale au point b'.

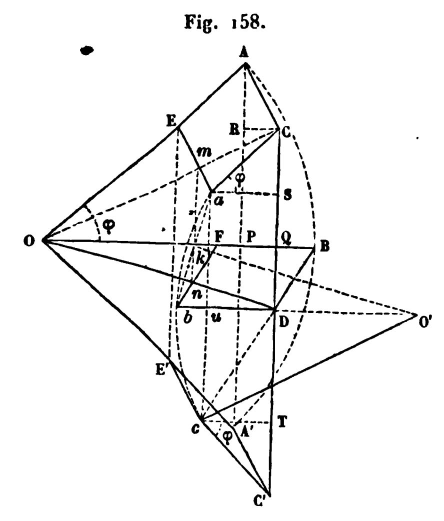
Il résulte de la génération de la courbe à longue inflexion, que pour imprimer un mouvement rectiligne à une tige quelconque (du moins dans de certaines limites), il suffira de l'articuler avec une autre tige, dont deux points fixes seront astreints à rester sur deux circonférences de cercles. Le tracé fera connaître les limites qu'il faudra assigner au mouvement qu'on veut produire

CONSTRUCTION PRATIQUE DU PARALLÉLOGRAMME DE WATT.

Soient OA et OA' (*fig.* 158) les positions extrêmes du balancier, OB sa position moyenne; sur le milieu Q de la flèche BP

on élève une perpendiculaire, et l'on prend CC' pour co

Fig. 158.



piston. Ayant c les parallélogram répondent aux p extrêmes et moy balancier, on fai une circonférenc trois points a, b, obtenus, et l'on termine le centre point est le point che de la bride.

On peut ren que la corde de l' décrit l'extrémité lancier est égal course du piston, car le quadrilatère ACA'C' est un pa gramme ayant deux côtés opposés égaux AC, A'C', autres parallèles AA', CC'. Remarquons maintenant triangles rectangles ACR, DBQ sont égaux; en effet poténuse AC du premier est égale à l'hypoténuse deuxième; de plus $CR = PQ = BQ$. De là il résul $AP = CD$: mais AP est la moitié de la course du piston aussi CD, et, par suite, DC'.

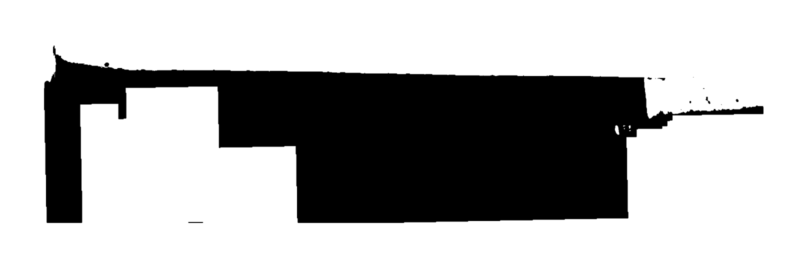
Joignons maintenant le point E au point E' : la lig divise proportionnellement les côtés OA, OA'; donc parallèle à AA', et, par suite, à CC'. D'un autre côté, les Ea, E'c sont égales et parallèles, car elles sont respecti égales et parallèles à AC et à A'C'; par suite la figure est un parallélogramme, et de là il résulte

$$EE' = ac:$$

alors la ligne ac est parallèle à ST, et l'on a

$$ac = ST, \quad aS = cT.$$

Mais les triangles rectangles CaS, C'cT sont égaux,



l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal ; donc

$$CS = C'T,$$

et, par suite,

$$CD - CS = C'D - C'T, \quad \text{ou} \quad DS = DT.$$

La ligne bD est donc perpendiculaire sur le milieu de la corde ac ; ce qui prouve que le centre du cercle abc, ou le point d'attache de la bride, est situé quelque part sur cette ligne. Si $AE = \frac{1}{2}OA$, la ligne EE' sera égale à la demi-course du piston, ainsi que ac son égale ; donc le quadrilatère CDac sera un parallélogramme, et l'on aura

$$Dc = Ca = Db :$$

dans ce cas, le point D sera donc le point d'attache de la bride. Le point C n'est pas le seul point du parallélogramme qui parcoure une ligne droite. Pour le faire voir, je joins le point O au point C ; et je dis que *le point m décrira une ligne parallèle à* CC'. Je considère une seconde position quelconque OB du balancier, je tire la ligne OD, et l'on aura

$$Em = Fn.$$

En effet, les triangles semblables OEm, OAC, donnent

$$\frac{Em}{OE} = \frac{AC}{OA}, \quad \text{d'où} \quad Em = \frac{AC.OE}{OA}.$$

Pour la seconde position du balancier, on a pareillement

$$\frac{Fn}{OF} = \frac{BD}{OB}, \quad \text{d'où} \quad Fn = \frac{BD.OF}{OB};$$

par conséquent

$$Em = Fn.$$

La comparaison des mêmes triangles donne encore

$$\frac{Om}{OC} = \frac{OE}{OA}, \quad \frac{On}{OD} = \frac{OF}{OB}; \quad \text{donc} \quad \frac{Om}{OC} = \frac{On}{OD}:$$

ce qui fait voir que la ligne mn divise proportionnellement les

côtés OC, OD du triangle COD; donc elle est parallèl
De là il suit que si le point C décrit une ligne droite,
m décrira aussi une ligne droite parallèle à la premi
attache ordinairement au point *m* la tige du piston
pompe à air.

DIMENSIONS DU BALANCIER ET DU PARALLÉLOGRAMM

Watt adoptait les dimensions suivantes, tant pour le
cier que pour le parallélogramme,

$$(1)\qquad OQ = \frac{3}{2}c,$$

d'où

$$(2)\qquad PQ = \frac{c}{24},$$

ainsi qu'on le verra plus bas (c est la course du piston),
il suit que la longueur du balancier est

$$(3)\qquad 2\,OB = 3c + \frac{c}{12}.$$

Enfin Watt assignait au côté AC les limit

$$(4)\qquad \begin{cases} AC > \dfrac{3}{7}c, \\ AC < \dfrac{1}{2}c. \end{cases}$$

Il résulte d'un Mémoire de M. Carbonnelle, inséré da
Mémoires de l'Académie de Bruxelles (année 1853, tome
que les dimensions précédentes, auxquelles Watt avait ét
duit, sans doute après de longs tâtonnements, assurent l
grande étendue possible au mouvement rectiligne de la ti
piston, en même temps qu'elles donnent à ce dernier m
ment toute la rectitude dont il est susceptible.

CALCUL DE LA LONGUEUR DE LA BRIDE.

Posant, pour abréger,

$$OA = b, \quad AE = l, \quad AOB = \varphi, \quad ab = \lambda,$$

[redacted]

on a les relations

$$aS = l\cos\varphi,\quad CS = l\sin\varphi,\quad au = \frac{1}{2}c - l\sin\varphi,\quad bu = l - l\cos\varphi.$$

On déduit ensuite du triangle rectangle *abu*,

$$\lambda^2 = \left(\frac{1}{2}c - l\sin\varphi\right)^2 + l^2(1-\cos\varphi)^2.$$

Mais les triangles rectangles $O'bk$, *abu*, étant semblables, donnent à leur tour, par la comparaison des côtés homologues, et en posant $O'b = R$,

$$\frac{R}{\frac{1}{2}\lambda} = \frac{\lambda}{l(1-\cos\varphi)},$$

d'où

$$R = \frac{\lambda^2}{2l(1-\cos\varphi)}.$$

Quant à l'angle φ, il sera donné par la formule

(5) $$\sin\varphi = \frac{c}{2b}.$$

Si dans la valeur ci-dessus de R on remplace λ^2 par sa valeur, on trouve, après quelques transformations,

(6) $$R = \frac{(b-l)^2}{l} - \frac{b(b-2l)}{l}\sin^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Ordinairement l'angle φ ne dépasse pas 20 degrés; par conséquent si $2l$ diffère très-peu de b, ainsi que cela a lieu généralement, on pourra réduire la formule (6) à son premier terme, et prendre

(7) $$R = \frac{(b-l)^2}{l}.$$

Si $l = \frac{1}{2}b$, l'équation citée donne $R = l$, ce qui confirme la solution géométrique du problème.

Remarquons maintenant que l'on a

$$\overline{OB}^2 = (OQ+PQ)^2 = \overline{AP}^2 + \overline{OP}^2 = \frac{c^2}{4} + (OQ-PQ)^2.$$

Développant et réduisant, il vient

$$4.\mathrm{OQ}.\mathrm{PQ}=\frac{c^2}{4};$$

alors si on prend, comme Watt,

$$\mathrm{OQ}=\frac{3}{2}c,$$

il vient

$$\mathrm{PQ}=\frac{c}{24},$$

et

$$2b=3c+\frac{c}{12}.$$

Au moyen de cette valeur de $2b$, la formule (5) don suite

$$\sin\varphi=\frac{12}{37}, \tag{8}$$

d'où

$$\varphi=18^\circ 55' 28'',7. \tag{9}$$

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES POMPES.

DIVERS GENRES DE SOUPAPES.

91. On appelle *soupape* une pièce mobile qui sert à intercepter momentanément la communication entre les deux parties d'un même conduit qu'un liquide doit parcourir.

Parmi les soupapes, on distingue la *soupape conique*, la *soupape sphérique*, et le *clapet ou soupape plane et à charnière*.

Les soupapes conique et sphérique (*fig.* 159 et 160) portent un petit cylindre qui glisse dans un cylindre directeur.

Fig. 159.

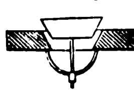


Fig. 160.

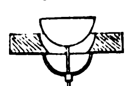


Fig. 161.

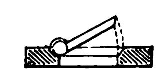
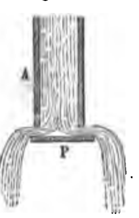


Fig. 162.



Le clapet (*fig.* 161) est terminé par une petite face plane inclinée, afin d'éviter qu'il ne se pose à plat sur l'ouverture du conduit.

Pour comprendre l'utilité de cette disposition, concevons un tube A (*fig.* 162) par lequel s'écoule un liquide; si pendant l'écoulement on approche de l'ouverture une petite plaque P qui déborde des deux côtés, cette plaque sera comme attirée vers l'ouverture du tube; cet effet est dû à la pression atmosphérique, parce qu'il se produit un vide au milieu et vers le bas de la masse en mouvement. De là il suit que si cette plaque P est une soupape, elle tendra à se fermer malgré l'écoulement du liquide.

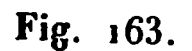
PISTON.

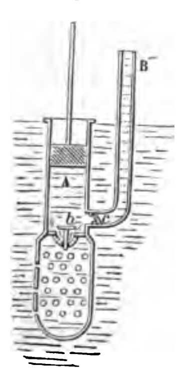
On nomme *piston* un cylindre de peu de longueur, par une tige qui reçoit le mouvement du moteur. Ce se meut dans un cylindre plus grand appelé *corps de* Les pistons des pompes sont formés ordinairement disques métalliques, entre lesquels se trouvent des r de cuir. Cette disposition a pour but de rendre plus i contact du piston avec le cylindre.

POMPE FOULANTE.

92. Il y a différentes espèces de pompes; les pri sont: la *pompe foulante*, la *pompe aspirante et foula*

Le corps de pompe de la pompe foulante plonge da jusqu'à une certaine profondeur (*fig.* 163); de la part


Fig. 163.



rieure de ce corps de pompe se déta tuyau qu'on nomme *tuyau d'ascen* qui est destiné à conduire l'eau à teur voulue. Une soupape qui s'ou dehors en dedans est placée à la pa férieure de ce corps de pompe. Une qui s'ouvre du dedans en dehors, tuée à la naissance du tuyau d'asce Le piston étant dans la position qu' sur la figure, si on l'abaisse, la so du corps de pompe se ferme; la so du tuyau latéral s'ouvre, et l'eau, par le piston, pénètre dans le tuyau d'élévation. Un no coup de piston produit une nouvelle ascension du liqui ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin l'eau s'écoule par l'o ture supérieure du conduit.

EFFORT TRANSMIS AU PISTON.

Nommons a la surface du piston, et a' celle de l'ouv du tuyau d'ascension. Q étant la pression que le piston e sur le liquide, cette pression rapportée à l'unité de su

CALCUL DU TRAVAIL UTILE.

Le travail utile, pour une course descendante du pist
évidemment le travail de la force variable Q donnée
quation (1). Pour obtenir ce travail, nommons z_0 la
verticale comprise entre la face inférieure du piston q
est au bas de sa course, et le centre de l'ouverture du
d'ascension; puis partageons la course c en n parties
infiniment petites; ε étant l'une de ces parties, on au

$$n\varepsilon = c.$$

Maintenant si dans la formule (1) nous faisons successi

$$\begin{aligned}
z &= z_0 + c,\\
z &= z_0 + c - \varepsilon,\\
z &= z_0 + c - 2\varepsilon,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z &= z_0 + c - n\varepsilon,
\end{aligned}$$

on aura les diverses valeurs de la pression Q, savoir,

$$\begin{aligned}
Q &= aD(H - z_0 - c),\\
Q_1 &= aD(H - z_0 - c + \varepsilon),\\
Q_2 &= aD(H - z_0 - c + 2\varepsilon),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Q_n &= aD(H - z_0 - c + n\varepsilon).
\end{aligned}$$

En même temps, les travaux élémentaires de ces diverses
seront

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}Q &= aD(H - z_0 - c)\varepsilon,\\
\mathfrak{T}Q_1 &= aD(H - z_0 - c)\varepsilon + aD\varepsilon^2,\\
\mathfrak{T}Q_2 &= aD(H - z_0 - c)\varepsilon + 2aD\varepsilon^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{T}Q_n &= aD(H - z_0 - c)\varepsilon + naD\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, la somme expri
le travail utile cherché; ce qui donne

$$\begin{aligned}
T_n = {} & aD(H - z_0 - c)(\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon)\\
& + aD\varepsilon^2(1 + 2 + 3 + \ldots + n),
\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$T_u = aD(H - z_0 - c)(n+1)\varepsilon + \frac{1}{2}aD\varepsilon^2(1+n)n;$$

faisant passer le facteur ε entre les parenthèses, il vient

$$T_u = aD(H - z_0 - c)(c+\varepsilon) + \frac{1}{2}aDc(c+\varepsilon).$$

Négligeant les termes affectés du facteur ε qui sont infiniment petits, ou, ce qui revient au même, faisant $\varepsilon = 0$, afin d'introduire dans la formule la loi de continuité, on obtient enfin

$$(3) \qquad T_u = aDc\left(H - z_0 - \frac{1}{2}c\right).$$

Relativement au travail moteur, il se détermine, dans chaque cas particulier, d'après la nature et le mode d'action de la force motrice. Quand il s'agit de petites pompes mues par des moteurs animés, on estime qu'il est à peu près égal à une fois et demie le travail utile. Si les résistances sont nombreuses, ainsi que les coudes et les tuyaux, on le fait égal à deux fois le travail utile. Comme, dans le travail des pompes, on ne peut déterminer exactement tous les frottements, on se contente dans la pratique de ces évaluations.

Toutefois le travail moteur peut s'obtenir approximativement de la manière suivante : Si pour une course du piston l'on nomme T_e le travail dû aux frottements de l'eau contre les parois des conduits supposés partout de même diamètre, et Tf le travail absorbé par les frottements ordinaires, on aura

$$T_m = T_u + T_e + T_f.$$

Mais, d'après M. de Prony, le frottement F d'un élément cylindrique de liquide d'une longueur s a pour valeur

$$F = \frac{1}{60}\,\frac{D}{g}\,\varepsilon s\left(\alpha u + \frac{\beta}{60}u^2\right),$$

en désignant par ε le périmètre intérieur du tuyau, et par u la vitesse moyenne de l'eau par minute. Or, chaque coup de piston

fait avancer l'eau dans les conduits d'une certaine qua
par conséquent, la somme des travaux élémentaires d
F pour tout le développement λ de la colonne liquid

$$T_e = \frac{1}{60}\,\frac{D}{g}\,\varepsilon\lambda c'\left(\alpha u + \frac{\beta}{60}\,u\right).$$

Soit a' la section du tuyau; on a évidemment, en su
qu'il n'y ait pas de fuites,

$$ac = a'c', \quad \text{d'où} \quad c' = \frac{a}{a'}\,c;$$

donc

$$T_e = \frac{1}{60}\,\frac{D}{g}\,\frac{\varepsilon\lambda ac}{a'}\left(\alpha u + \frac{\beta}{60}\,u^2\right).$$

Soient ρ le rayon du conduit, et N le nombre de (
courses par minute, on a les relations

$$\varepsilon = \pi\rho, \quad a' = \pi\rho^2, \quad u = \frac{Nac}{\pi\rho^2},$$

par suite,

$$T_e = \frac{N}{60}\,\frac{D}{g}\,\frac{a^2c^2\lambda}{\pi\rho^3}\left(\alpha + \frac{\beta}{60}\,\frac{Nac}{\pi\rho^2}\right).$$

Substituant cette valeur dans celle de T_m, il vient

$$T_m = T_u + \frac{N}{60}\,\frac{D}{g}\,\frac{a^2c^2\lambda}{\pi\rho^3}\left(\alpha + \frac{\beta}{60}\,\frac{Nac}{\pi\rho^2}\right) + T_f.$$

Tel est le travail relatif à une course du piston.

S'il y avait plusieurs systèmes de conduits n'ayant pa
le même diamètre, chaque système de même rayon introd
au deuxième membre de la formule précédente un term(
logue à celui qui accompagne T_u; par conséquent, pou
pompe quelconque, le travail moteur développé en un(
nute aura pour valeur

$$T_m = T_u + \frac{N^2}{60}\,\frac{D}{g}\,\frac{a^2c^2}{\pi}\,\Sigma\,\frac{\lambda}{\rho^3}\left(\alpha + \frac{\beta}{60}\,\frac{Nac}{\pi\rho^2}\right) + T_f;$$

T_u et T_f étant maintenant le travail utile, et le travail des
tements ordinaires en une minute, et le signe Σ s'étend

tous les systèmes de tuyaux. Si dans cette formule on remplace Nac par sa valeur S, on obtient enfin

$$(3\,bis)\qquad T_m = T_u + \frac{1}{60}\frac{D}{g}\frac{S^2}{\pi}\Sigma\frac{\lambda}{\rho^3}\left(\alpha + \frac{\beta}{60}\frac{S}{\pi\rho^2}\right) + T_f.$$

Le terme T_f, ou du moins sa limite, se calculera, dans chaque cas particulier, d'après les dispositions du mécanisme et la nature de la force motrice.

Quant aux coefficients α, β ils ont pour valeurs,

$$\alpha = 0{,}000170,$$
$$\beta = 0{,}003416.$$

On peut remarquer que le travail absorbé par les frottements de l'eau croît très-rapidement avec S. Il croît aussi très-rapidement à mesure que ρ diminue.

Si l'on prend, par exemple,

$$S = 0^{mc},1, \quad \lambda = 4^m, \quad \rho = 0^m,03,$$

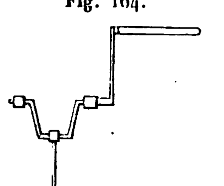
on trouve

$$T_e = 16^{km}, \text{ en une minute.}$$

CALCUL D'UNE POMPE ÉTABLIE.

Supposons que le piston de la pompe dont il s'agit s'articule avec une manivelle coudée mise en mouvement par la main d'un homme (*fig.* 164). Nommant T_u le travail utile développé en une minute, ce travail aura pour valeur

Fig. 164.



$$(4)\qquad T_u = NacD\left(H - z_0 - \frac{1}{2}c\right).$$

T_m étant aussi le travail développé par le moteur pendant cet intervalle de temps, le rendement de la pompe sera

$$(5)\qquad \frac{T_u}{T_m} = \frac{NacD\left(H - z_0 - \frac{1}{2}c\right)}{T_m}.$$

Soient R le rayon de la circonférence que décrit la moteur, et V la vitesse par seconde, ω étant la vitesse a de rotation, on aura

$$R\omega = V, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{V}{R}.$$

Mais

$$\omega = \frac{\pi N}{30};$$

donc on trouve

$$(6) \qquad N = \frac{30}{\pi}\frac{V}{R}.$$

Enfin le débit par minute, et en supposant qu'il n'y a fuites, sera donné par l'équation (2).

Supposons, par exemple,

$$H = 3^{m}, \quad R = 0^{m},30, \quad c = 0^{m},40, \quad z_{1} = 0^{m},03, \quad S$$

Il résulte du tableau de la page 44 qu'un manœuvre sur une manivelle avec une vitesse de $0^{m},75$ par secon en une minute, 360 kilogrammètres; on aura donc

$$T_{m} = 360^{km}.$$

Alors l'équation (5) combinée avec l'équation (6) don

$$\frac{T_{u}}{T_{m}} = 0,769.$$

Mais pour obtenir ce rendement, il faut faire mouvoir l avec un nombre de tours par minute donné par la form de laquelle on tire

$$N = 23,87.$$

Après cela on trouve, par la formule (2),

$$a = 0^{mq},01,$$

d'où

$$r = 0^{m},0577.$$

Les valeurs précédentes de $\frac{T_{u}}{T_{m}}$ et de r ne doivent êtr dées que comme approchées, attendu que l'on a suppo

absence de fuites. Si l'on mesure directement le rayon r du corps de pompe, la différence des deux membres de l'équation (2) donnera la quantité d'eau perdue par minute.

CALCUL D'UNE POMPE A ÉTABLIR.

Supposons qu'on veuille établir une pompe qui puisse élever à la hauteur H, S *mètres cubes d'eau par minute.*

Le mécanisme étant celui de l'exemple précédent, l'équation (6) fera connaître N ou R, suivant que l'on se donnera R ou N. Retranchant $\frac{1}{5}$ du volume engendré par le piston en une minute, l'équation (2) deviendra

$$(7) \qquad \frac{4}{5} acN = S,$$

et celle-ci servira à déterminer a ou c suivant que l'on se donnera à volonté c ou a. Enfin le travail utile, en une minute, s'obtiendra par la formule (4). En multipliant le résultat trouvé par $\frac{3}{2}$, on aura pour le travail moteur une valeur qui sera généralement suffisante pour entretenir le mouvement régulier de la pompe.

Supposons, par exemple,

$$H = 2^{m}, \quad S = 0^{mc},1, \quad r = 0^{m},0577 \quad \text{ou} \quad a = 0^{mq},01,$$
$$R = 0^{m},2387, \quad z_{\prime} = 0^{m},03, \quad V = 0^{m},75.$$

On déduit d'abord de la formule (6)

$$N = 30.$$

L'équation (7) donne ensuite

$$c = 0^{m},417.$$

On tire de l'équation (4) combinée avec l'équation (7)

$$T_u = 220^{km} \text{ environ.}$$

Enfin si l'on multiplie le nombre ci-dessus par $\frac{3}{2}$, on aura à

peu près la quantité de travail moteur qu'il faudra
pour entretenir le mouvement de la pompe. On trou
sorte

$$T_m = 330^{kil}.$$

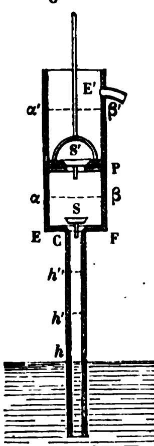
Si l'on remarque maintenant que le travail dévelc
l'homme sur une manivelle tournant avec une vitesse
par seconde, s'élève à 360 kilomètres en 1 minute, on
clura qu'un seul homme pourra manœuvrer la pompe
éléments viennent d'être calculés.

POMPE ASPIRANTE.

93. *Proposons-nous de calculer le nombre de c*
piston nécessaires pour élever l'eau jusqu'à la naiss
corps de pompe.

Soient a la section intérieure du corps de pompe (*fig*
a' celle du tuyau d'aspiration, et supposons que l'eau s

Fig. 165.



à la hauteur $hh' = z$, comptée du
dans le réservoir. Si nous abaisson
ton jusqu'au bas de sa course, l'air
au-dessous sera comprimé. En v
son élasticité, il fermera la soup
ouvrira la soupape S', passera au
du piston, et de là dans l'atmosph
relevant le piston, l'air du tuyau
ration ouvrira la soupape S et se ré
dans le corps de pompe pour ren
vide laissé par le piston. En mêm
l'élasticité de l'air diminuera dans l
d'aspiration. Alors la pression de
sphère dans le réservoir devenant
dérante, fera monter la colonne jusqu'à une nouvelle
h'', et ainsi de suite. Une fois que l'eau sera parvenue
corps de pompe, le piston jouera dans l'eau, celle-ci
la soupape S', passera au-dessus du piston, pour s'écoul
tôt par le tuyau de décharge E'.

Reprenons la question que nous avons en vue.

Le piston ayant été abaissé jusqu'au bas de sa course, puis relevé, l'eau s'est élevée de h' jusqu'à une certaine hauteur h'' qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, posons

$$Ch = \lambda, \quad PF = l,$$

et soit H la hauteur de la colonne d'eau capable de faire équilibre à la pression atmosphérique ($H = 10^m,40$). D'abord, quand l'eau est en h', le piston étant abaissé, le poids de la colonne liquide $h'h$, plus la pression de l'air situé au-dessus de h', feront équilibre à la pression atmosphérique, et l'on aura, en nommant ϖ cette pression rapportée à l'unité de surface, et D le poids de l'eau sous l'unité de volume,

$$\varpi a' + a'Dz = a'HD;$$

d'où l'on tire

$$\varpi = D(H - z). \tag{1}$$

Posons maintenant

$$hh'' = x.$$

Quand le piston sera arrivé en P, la masse d'air située de c en h' occupera un volume égal à

$$al + a'(\lambda - x).$$

Donc si l'on nomme ϖ' la nouvelle élasticité de l'air, on aura, d'après la loi de Mariotte,

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{a'(\lambda - z)}{al + a'(\lambda - x)},$$

de là on tire, en ayant égard à l'équation (1),

$$\varpi' = \frac{a'D(H - z)(\lambda - z)}{al + a'(\lambda - x)}. \tag{2}$$

Mais quand le piston s'est arrêté en P et l'eau en h'', la soupape S est retombée par son propre poids; donc l'élasticité de l'air compris depuis h'' jusqu'en C fait aussi équilibre à la pression atmosphérique à l'aide de la colonne liquide $h''h$;

par conséquent ϖ' aura aussi pour valeur

$$(3) \qquad \varpi' = \mathrm{D}(\mathrm{H} - x).$$

Égalant les valeurs (2) et (3) de ϖ', on a

$$\mathrm{D}(\mathrm{H} - x) = \frac{a'\mathrm{D}(\mathrm{H} - z)(\lambda - z)}{al + a'(\lambda - x)};$$

laquelle, étant développée, devient

$$(4) \qquad x^2 - \left(\frac{a}{a'}l + \mathrm{H} + \lambda\right)x + \frac{a}{a'}\mathrm{H}l + (\mathrm{H} + \lambda)z - z^2 =$$

Résolvant cette équation, on trouve

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}l + \mathrm{H} + \lambda\right)$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{a'}l + \mathrm{H} + \lambda\right)^2 - 4\left[\frac{a}{a'}\mathrm{H}l + (\mathrm{H} + \lambda)z - \right.}$$

Développant le carré sous le radical, et réduisant, il v

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}l + \mathrm{H} + \lambda\right)$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a'^2}l^2 + \mathrm{H}^2 + \lambda^2 - 2\frac{a}{a'}\mathrm{H}l + 2\frac{a}{a'}l\lambda - 4(\mathrm{H} + \lambda)z + 4z}$$

Ajoutant et retranchant sous le radical le terme $4\mathrm{H}\lambda$, on après réductions faites,

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}l + \mathrm{H} + \lambda\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\mathrm{H} - \lambda - \frac{a}{a'}l\right)^2 + 4(\mathrm{H} - z}$$

Remarquons maintenant que la racine x' qui répond + est telle, qu'on a

$$x' > \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}l + \mathrm{H} + \lambda\right) \pm \frac{1}{2}\left(\mathrm{H} - \lambda - \frac{a}{a'}l\right),$$

en prenant + ou — suivant que $\mathrm{H} > \lambda + \frac{a}{a'}l$ ou $\mathrm{H} <$

Si l'on prend le signe +, on a

$$x' > \mathrm{H};$$

donc la racine x' doit être rejetée. Si l'on prend le signe —, l'inégalité ci-dessus devient

$$x' > \frac{a}{a'} l + \lambda,$$

et à fortiori

$$x' > \mathrm{H}.$$

Donc on devra, dans tous les cas, prendre pour unique racine

$$(5) \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'} l + \mathrm{H} + \lambda\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\mathrm{H} - \lambda - \frac{a}{a'} l\right)^2 + 4(\mathrm{H} - z)(\lambda - z)}.$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'obtenir.

En y faisant $z = 0$, on aura la hauteur à laquelle l'eau s'élèvera au premier coup de piston (aller et venir); on trouvera ainsi

$$x = x_1.$$

On fera dans (5), $z = x_1$, et l'on aura la nouvelle hauteur

$$x = x_2,$$

à laquelle le deuxième coup de piston fera monter le liquide. On continuera ce calcul jusqu'à ce qu'on trouve $x > \lambda$. On connaîtra de la sorte le nombre de doubles courses nécessaires pour faire arriver l'eau dans le corps de pompe.

DE QUELLE QUANTITÉ FAUT-IL FAIRE DESCENDRE LE PISTON POUR QU'IL NE SORTE PAS D'AIR DU CORPS DE POMPE?

La soupape S étant fermée, et l'eau étant à une hauteur quelconque h' dans le tuyau d'aspiration, si l'on fait descendre le piston P, il comprimera l'air situé au-dessous de lui, et ce ne sera que lorsque cet air aura acquis une élasticité égale à celle de l'air extérieur que la soupape S' sera sur le point de s'ouvrir. Pour trouver cette limite $\alpha\beta$, posons toujours $hh' = z$, et remarquons que l'élasticité de l'air répandu dans le corps de pompe et le tuyau d'aspiration avant l'abaissement

du piston, avait pour élasticité

$$\varpi = D(H - z).$$

Mais l'air qui occupe l'espace EP, et dont l'élasticité leur ci-dessus, a un volume égal à *al* après l'abaisse piston, cette même masse d'air prend un volume égal à par suite son élasticité ϖ' sera donnée par l'équation

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{al}{a.E\alpha},$$

d'où l'on tire

$$\varpi' = \frac{lD(H - z)}{E\alpha}.$$

Or la pression atmosphérique, à laquelle ϖ' doit être aussi pour valeur

$$\varpi' = HD;$$

par conséquent

$$(6) \qquad H = \frac{l(H - z)}{E\alpha},$$

d'où

$$E\alpha = \frac{l(H - z)}{H}.$$

On voit que la valeur de $E\alpha$ sera d'autant plus petite, hauteur z du liquide dans le tuyau d'aspiration se même plus grande.

Il résulte de là que *pour assurer la prompte arr l'eau dans le corps de pompe, il faut, dans les p instants de la manœuvre, faire descendre le piston j bas de sa course.*

RÉSISTANCE QU'IL FAUT VAINCRE POUR FAIRE MONTER LE

Supposons l'eau en h', et le piston en P dans sa cours tante.

Le dessus du piston supporte la pression atmosphéri

$$DaH.$$

Le dessous du piston reçoit aussi, de bas en haut, la pression atmosphérique, diminuée de la pression due à la colonne d'eau $h'h$. Cette pression a donc pour valeur

$$DaH - Daz = Da(H - z);$$

retranchant cette pression de la précédente, il reste pour la pression à vaincre afin de soulever le piston

$$Daz.$$

Donc *la résistance à vaincre est égale au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base la tête du piston, et pour hauteur, la hauteur de l'eau au-dessus du niveau dans le réservoir.*

Supposons maintenant que l'eau soit arrivée au-dessus du piston, jusqu'à la hauteur $P\beta' = y$. La pression supportée par le dessus du piston sera, en nommant ε son épaisseur,

$$AD(H + y - \varepsilon).$$

Mais la pression qui s'exerce en sens contraire, et au même niveau, a pour valeur

$$aD(H - l - \lambda - \varepsilon);$$

donc on a pour la pression à vaincre

$$aD(H + y - \varepsilon) = aD(y + l + \lambda):$$

ce qui montre que *dans tous les cas, la résistance qu'on doit soulever a pour mesure le poids d'une colonne de liquide qui aurait pour base la tête du piston, et pour hauteur, la hauteur de l'eau au-dessus du niveau dans le réservoir.*

TRAVAIL UTILE.

Supposons le régime de la pompe établi, et proposons-nous d'obtenir le travail utile; h étant la hauteur verticale du point E au-dessus du niveau dans le réservoir, la résistance utile a

pour valeur

$$(7) \qquad Q = ahD.$$

Donc le travail utile pour une double course du pisto

$$(8) \qquad T_u = achD.$$

DÉBIT THÉORIQUE.

N étant le nombre de coups de piston ou de doubles par minute, le débit en mètres cubes et relatif à cet ir de temps aura pour valeur, s'il n'y a pas de fuites,

$$(9) \qquad S = acN.$$

Pour une pompe établie, on pourra mesurer S, a, c; quantité d'eau perdue par minute sera

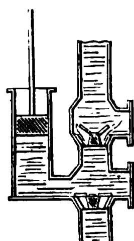
$$(10) \qquad \Delta = acN - S.$$

La pompe aspirante donne lieu aux mêmes problème pompe foulante.

POMPE ASPIRANTE ET FOULANTE.

94. La pompe aspirante et foulante (*fig.* 166) ne de la pompe simplement foulai parce qu'elle est munie d'un tuy piration. Une fois l'eau arrivée corps de pompe, chaque course dante du piston foule l'eau dans l d'ascension, tandis que chaque co cendante la fait affluer dans le c pompe.

Fig. 166.



TRAVAIL UTILE.

Nommons λ la hauteur verticale du tuyau d'aspiratio hauteur verticale du tuyau d'ascension comptée du ce l'ouverture latérale, c la course du piston, et z, z_0, les quantités que dans la pompe foulante. Enfin désignons la distance verticale du centre de l'ouverture du tuya

cension au bas du corps de pompe. La résistance à vaincre pour soulever le piston aura pour valeur (*voir* page 398)

$$(1) \qquad Q = a\mathrm{D}(\lambda + z'_0 + z).$$

On trouve ensuite, pour le travail utile, en procédant comme à la page 387,

$$(2) \qquad \mathfrak{T}_u = ac\mathrm{D}\left(\lambda + \frac{1}{2}c + z_0 + z'_0\right).$$

Mais le travail utile relatif à une course descendante du piston est exprimé par la formule (3) de la page 388, savoir :

$$(3) \qquad \mathfrak{T}'_u = a\mathrm{D}c\left(\mathrm{H} - z_0 - \frac{1}{2}c\right);$$

donc, pour une double course, le travail utile sera

$$\mathfrak{T}_u + \mathfrak{T}'_u = \mathrm{T}_u,$$

ou

$$(4) \qquad \mathrm{T}_u = ac\mathrm{D}(\lambda + \mathrm{H} + z'_0).$$

Nommons H′ la distance verticale qui sépare le niveau de l'eau dans le réservoir, de l'ouverture supérieure du tuyau d'ascension; on aura

$$\mathrm{H}' = \lambda + \mathrm{H} + z'_0,$$

et par suite

$$(5) \qquad \mathrm{T}_u = ac\mathrm{DH}':$$

ce qui fait voir que *malgré la résistance variable qui s'exerce dans le corps de pompe, soit qu'on élève le piston, soit qu'on l'abaisse, le travail utile est égal au travail nécessaire pour élever à la hauteur* H′, *un volume d'eau égal à celui du corps de pompe.*

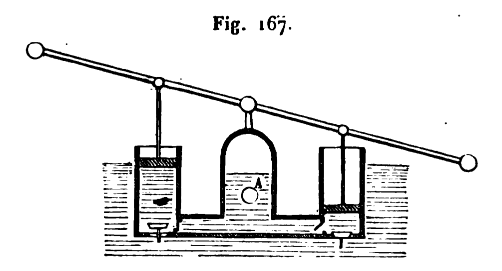
Quant au débit, il s'obtiendra comme précédemment.

POMPE A INCENDIE.

La pompe à incendie (*fig.* 167) se compose de deux pompes foulantes disposées dans une caisse qui sert de réservoir; cette

caisse est portative, ou montée sur des roues. On (

Fig. 167.



l'eau dans la caisse en l'apportant à bras d'hommes seaux. Les deux pistons sont mis en mouvement par ı monté sur une espèce de dôme qui forme à l'intérieur ı voir d'air. Le jeu de la pompe refoule l'eau dans ce ré de là elle s'échappe par un tuyau de cuir vissé sur ture A. L'air du réservoir étant comprimé par l'eau foulent les pistons, entretient la continuité du jet, en effort pour se détendre.

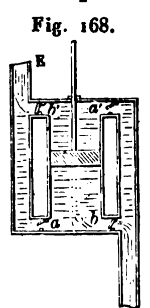
VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

DES POMPES (SUITE).

POMPE DE DELAHIRE.

95. La pompe de Delahire (*fig.* 168) est une pompe aspirante et foulante à double effet; la figure ci-contre en représente les parties essentielles. Considérons le piston dans sa course descendante; l'eau foulée par le piston ouvre la soupape *a* et ferme les soupapes *b*, *b'* placées aux extrémités de la même diagonale; en même temps il se fait un vide au-dessus du piston, lequel est immédiatement rempli par le liquide affluan du réservoir. Quand le piston remonte, les soupapes *b* et *b'* s'ouvrent, tandis que les soupapes *a*, *a'* se ferment; le piston, dans sa course ascendante, refoule donc une nouvelle quantité d'eau dans le tuyau d'ascension; pendant ce temps, l'eau du réservoir arrive dans le bas du corps de pompe, et ainsi de suite.

Fig. 168.



EFFORT TRANSMIS AU PISTON.

Soient H la hauteur verticale du tuyau d'ascension comptée du centre de l'ouverture inférieure *a*, et λ la hauteur analogue du tuyau d'aspiration relative à la même origine. Nommons aussi z la distance verticale comprise entre le point *a* et la face inférieure du piston considéré dans une position quelconque; enfin désignons aussi par ϖ la pression de l'atmosphère rapportée à l'unité de surface. D étant toujours le poids de l'eau sous l'unité de volume, et Q l'effort transmis au piston par le moteur, la force totale qui le sollicite à descendre sera, en nom-

mant ε son épaisseur,

$$Q + a\varpi - aD(\lambda + z + \varepsilon).$$

D'un autre côté, la force qui s'oppose au mouvement a pour valeur

$$a\varpi + aD(H - z);$$

donc

$$Q + a\varpi - aD(\lambda + z + \varepsilon) = a\varpi + aD(H - z);$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad Q = aD(H + \lambda + \varepsilon).$$

Si l'on considère le piston dans sa course ascendante, la force qui le sollicite sera

$$Q + a\varpi - aD(\lambda + z).$$

Mais l'effort contraire est égal à

$$a\varpi + aD(H - z - \varepsilon);$$

donc Q se déterminera par l'équation

$$Q + a\varpi - aD(\lambda + z) = a\varpi + aD(H - z - \varepsilon),$$

de laquelle on tire

$$(2) \qquad Q = aD(H + \lambda - \varepsilon).$$

Ainsi, dans chaque cas, l'effort transmis au piston est une quantité constante.

TRAVAIL UTILE.

En vertu de l'équation (1), le travail utile effectué pendant une course descendante a pour valeur, en nommant toujours c la course du piston,

$$(3) \qquad \mathcal{T}_u = aDC(H + \lambda + \varepsilon).$$

L'équation (2) donne également pour le travail utile relatif à une course ascendante,

$$(4) \qquad \mathcal{T}'_u = aDC(H + \lambda - \varepsilon).$$

Ajoutant les équations (3) et (4), on trouve pour le travail

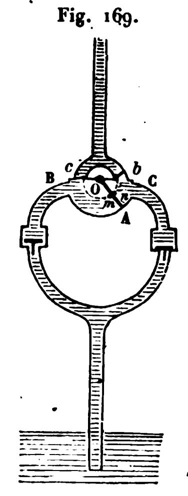
utile relatif à une double course,

$$(5) \qquad T_u = 2aDC(H + \lambda).$$

POMPE DE BRAMAH.

96. La pompe dont les parties essentielles sont représentées dans la *fig.* 169 est due à Bramah, mécanicien anglais, qui vivait au commencement de ce siècle. Elle se distingue de la pompe de Delahire, surtout par le piston qui est ici remplacé par une lame rectangulaire, laquelle se meut dans un corps de pompe horizontal consistant en un demi-cylindre. La lame OA reçoit du moteur un mouvement circulaire alternatif qu'elle accomplit en frottant à la fois contre les deux bases, et la surface cylindrique du corps de pompe. Quand le piston OA se meut vers OC, il refoule l'eau dans le tuyau d'ascension en faisant ouvrir la soupape b, et fermer celle du conduit c; pendant ce temps, l'eau arrive dans le corps de pompe par le tuyau de gauche. Lorsque le piston retourne vers OB, les mêmes choses se passent, mais en sens inverse; et ainsi de suite.

Fig. 169.

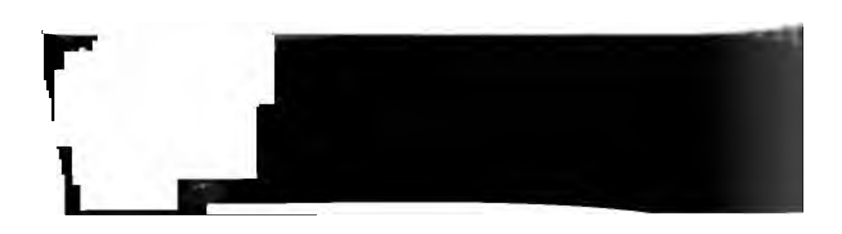


EFFORT TRANSMIS AU PISTON.

Soient Q cet effort, a l'aire de la face du piston qui foule l'eau, et ϖ la pression atmosphérique rapportée à l'unité de surface; m et n étant les centres de gravité des deux faces de OA, la pression que le liquide exerce sur la face gauche sera (*voir* page 70) aDz, en désignant par z l'abaissement du point m au-dessous de BC.

Maintenant, si l'on nomme λ la hauteur de BC au-dessus du niveau de l'eau dans le réservoir, la pression due à l'atmosphère aura pour valeur

$$a\varpi - aD\lambda;$$



par conséquent la pression totale qui agit sur la fa
du piston sera équivalente à

$$Q + a\varpi + aDz - aD\lambda.$$

Soit aussi H la hauteur verticale du tuyau d'ascension
de BC; la pression exercée sur la face droite du pistc

$$a\varpi + aD\,(H + z'),$$

z' étant l'abaissement du point n au-dessous de BC. I
dant l'écoulement régulier du liquide, on aura

$$Q + a\varpi + aDz - aD\lambda = a\varpi + aD(H + z'),$$

de laquelle on tire

$$Q = aD\,(H + \lambda + z' - z).$$

En négligeant la très-petite différence $z' - z$, il vient
ment

(1) $$Q = aD(H + \lambda).$$

Ce qui fait voir que l'*effort* Q *est constant*, comme
pompe de Delahire.

TRAVAIL UTILE.

Le piston n'étant soumis qu'à des pressions élém
constantes, à cause que les pressions dues à la pesante
quide renfermé dans le corps de pompe se détruisent, d
à très-peu près, il en résulte que la force Q est appli
centre de a. Donc si l'on nomme R le rayon du c
pompe, et si l'on suppose que le piston puisse décrire
demi-circonférence, le travail utile relatif à une cours
ton sera

(2) $$T_u = \frac{1}{2}\pi a\,DR\,(H + \lambda).$$

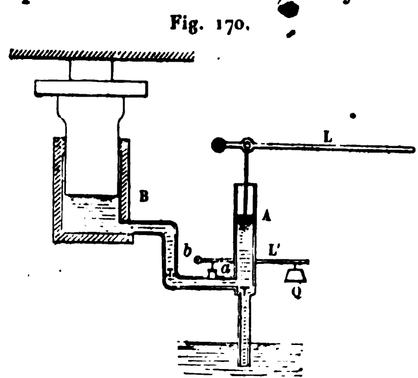
On peut remarquer que le coefficient de $H + \lambda$ est
poids de l'eau que chaque coup de piston foule dans
d'ascension. Quant au travail moteur T_m, il se dé

dans chaque cas, d'après la nature et le mode d'action de la force motrice. En divisant $\frac{T_u}{T_m}$, on aura ensuite le rendement.

PRESSE HYDRAULIQUE.

97. La presse hydraulique (*fig.* 170) consiste en une pompe aspirante et foulante dont le cylindre A est très-étroit. Ce cylindre communique avec un deuxième corps de pompe B appelé *caisse*, et d'un grand diamètre relativement au premier. Les conduits étant supposés pleins d'eau, on exerce une pression dans le petit corps de pompe à l'aide d'un piston mû par un levier L; la pression produite se transmet, par l'intermédiaire du liquide, jusque dans la caisse, et, par suite, sur un piston plein qui vient butter contre un obstacle fixe. Sur le conduit qui joint les deux corps de pompes, on dispose une soupape conique *a* dite de *sûreté*, et qu'un levier L′, chargé d'un poids Q, tient fermée, tant que la pression intérieure ne dépasse pas une certaine limite. Du moment où la limite de pression est atteinte, la soupape *a* s'ouvre, et laisse échapper le liquide. La figure ci-après représente le piston dans sa course descendante. Quant au jeu des soupapes, il est le même que dans les autres pompes.

Fig. 170.



PRESSION TRANSMISE AU PISTON DE LA CAISSE.

Soient a l'aire du petit piston, a' l'aire du grand, ϖ la pression exercée dans le petit corps de pompe, ϖ' celle que reçoit le piston de la caisse. La pression rapportée à l'unité de surface sera, dans les deux corps de pompe,

$$\frac{\varpi}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\varpi'}{a'}.$$

Mais, en vertu du principe d'égalité de pression, ces deux pressions sont égales ; donc

$$(1) \qquad \frac{\varpi'}{a'} = \frac{\varpi}{a}, \quad \text{d'où} \quad \varpi' = \frac{a'}{a}\varpi.$$

Soit aussi α l'aire de la soupape de sûreté qui plonge dans le conduit ; la pression p qu'elle reçoit de bas en haut aura pour valeur

$$(2) \qquad p = \frac{\alpha}{a}\varpi.$$

Soit E la limite de l'effort qu'on veut exercer sur le piston de la caisse, ϖ_1 et p_1 étant les pressions correspondantes dans le petit corps de pompe, et sur la soupape de sûreté, on aura

$$\mathrm{E} = \frac{a'}{a}\varpi_1, \quad p_1 = \frac{\alpha}{a}\varpi_1;$$

de là on tire

$$(3) \qquad p_1 = \frac{\alpha}{a'}\mathrm{E}.$$

Mais à ce moment la soupape de sûreté doit être sur le point de s'ouvrir ; donc on aura, en désignant par q et s les bras de levier des forces Q et p_1,

$$\mathrm{Q}q = p_1 s;$$

de là on tire, en remplaçant p_1 par sa valeur (3),

$$(4) \qquad \mathrm{Q} = \frac{s}{q}\frac{\alpha}{a'}\mathrm{E}.$$

Ayant choisi le rapport $\frac{s}{q}$ des deux bras de levier, cette formule fera connaître ensuite la charge Q qui laissera ouvrir la soupape de sûreté, lorsque la limite de pression sera atteinte.

Supposons, par exemple,

$$\varpi = 100^{\mathrm{k}}, \quad a = 0^{\mathrm{mq}},01, \quad a' = 0^{\mathrm{mq}},8;$$

on trouve, par la formule (1),

$$\varpi' = 8000^{\mathrm{k}}.$$

Supposons que les tuyaux soient tels, qu'on ne puisse, sans craindre une rupture, transmettre au piston de la caisse une pression supérieure à 10000 kilogrammes. On aura, dans ce cas,

$$E = 10000^{k}.$$

Alors, si l'on prend

$$\alpha = 0^{mq},0005, \quad \frac{S}{q} = \frac{2}{5},$$

la formule (4) donnera

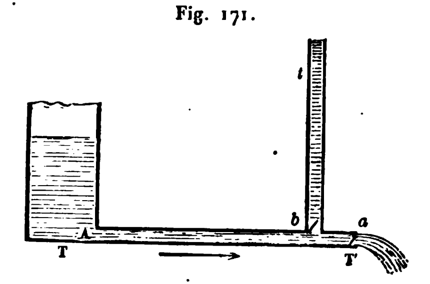
$$Q = 2^{k},5$$

pour la charge du levier de la soupape de sûreté.

BÉLIER HYDRAULIQUE.

98. Le bélier hydraulique a été imaginé en 1796 par Montgolfier, l'inventeur des aérostats. Il consiste essentiellement en un tuyau TT′ (*fig.* 171) légèrement incliné dans le sens du mouvement de l'eau. Ce tuyau reçoit, par son orifice A, l'eau d'une chute; à l'extrémité T′ est une soupape *a* qui s'ouvre du dehors au dedans; enfin du tuyau TT′ se détache un conduit *bt* fermé à sa partie inférieure par une soupape s'ouvrant de bas en haut. Le cylindre TT′ se nomme *corps du bélier;* on nomme *tête du bélier* la partie de ce cylindre où sont les deux soupapes *a*, *b*.

Fig. 171.



JEU DU BÉLIER.

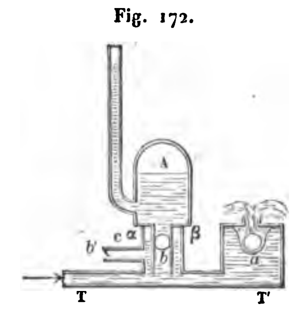
L'eau s'introduit dans le cylindre TT′ avec une vitesse plus ou moins grande suivant la hauteur de la chute; au moment où elle atteint la soupape *a*, celle-ci se ferme. Mais aussitôt les parois du bélier réagissent sur le liquide qui est repoussé vers sa source; alors la soupape *b* s'ouvre brusquement, et l'eau

s'introduit dans le tuyau d'ascension. En même temps il se fait un vide au point *a* qui permet à la soupape de s'ouvrir; alors une certaine quantité de liquide sort du tuyau. Bientôt après l'eau reprend son mouvement, et les mêmes phénomènes se reproduisent. On dit qu'il y a coup de bélier chaque fois que la soupape du tuyau d'ascension s'ouvre brusquement.

DÉTAILS DE CONSTRUCTION ADOPTÉS PAR MONTGOLFIER.

La tête du bélier (*fig.* 172) a un diamètre plus grand que celui du corps. Les soupapes sont des boules sphériques en fonte ou en fer creux, qui s'appuient sur les deux orifices *a* et *b*, lesquels sont garnis de cuir afin d'amortir les chocs. Ces boules sont retenues dans des muselières qui les empêchent de trop s'éloigner. L'orifice *a* n'est pas placé à l'extrémité T′ du cylindre TT′, mais un peu au-dessus. L'orifice *b* communique avec une cloche pleine d'air par un ajutage dans lequel se meut la boule servant de soupape; quant au tuyau d'ascension, il s'ouvre dans le réservoir d'air. Lorsque par le jeu du bélier l'eau s'introduit brusquement dans le réservoir A, l'air s'y trouve comprimé; cet air, en faisant effort pour se détendre, entretient la continuité du jet pendant que la soupape *b* se trouve fermée. Au-dessous de la cloche, il y a dans le bélier même en α et β une petite couche d'air qu'on appelle *matelas d'air*, et qui facilite le jeu de la machine. Mais comme l'eau en sortant du réservoir A emporte à chaque fois une certaine quantité de l'air qui s'y trouve, on renouvelle celui-ci à l'aide d'un tube *b′c* muni d'une soupape qui s'ouvre du dehors en dedans. Après chaque coup de bélier, la soupape *b* retombe sur l'ouverture du conduit, et il se produit une réaction qui fait retourner l'eau vers sa source; alors il se fait un vide momentané vers la tête du bélier, qui provoque l'entrée d'une certaine quantité d'air extérieur. Cet air est ensuite entraîné

Fig. 172.



dans le réservoir A par l'eau qu'emmène le coup de bélier suivant.

La soupape *a* s'appelle *soupape d'écoulement*; la soupape *b*, *soupape d'arrêt*.

BÉLIER DE SENLIS.

Les résultats suivants, relatifs au bélier de Senlis, ont été obtenus par l'expérience :

La longueur du bélier...	$= 8^{m}$.
Le diamètre..................	$= 0^{m},203$.
La hauteur de chute	$= 0^{m},979$.
Le débit de la source par minute. .	$= 1987^{lit}$.
L'eau est élevée à..............	$= 4^{m},55$.
Le débit du bélier par minute.....	$= 269^{lit}$.

Nommant comme toujours T_u le travail utile, T_m le travail moteur, on aura, par minute,

$$T_u = 269 \times 4,55 = 1224^{km},$$
$$T_m = 1987 \times 0,979 = 1945^{km},$$

et pour le rendement

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1224}{1945} = \frac{63}{100} \text{ environ.}$$

D'autres béliers, construits avec d'autres dimensions, et fonctionnant sous d'autres chutes, ont donné, à très-peu près, le même rendement.

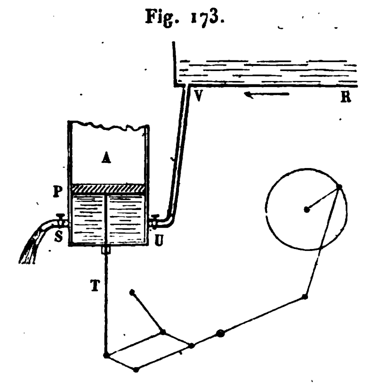
MACHINES A COLONNE D'EAU.

99. *On nomme machines à colonne d'eau, celles dans lesquelles un piston est mis en mouvement par un courant d'eau qui descend d'une assez grande hauteur.*

Soit A (*fig.* 173) un corps de pompe dans lequel se meut un piston P, et supposons ce corps de pompe A mis en communication avec un réservoir supérieur R par un conduit UV;

soient aussi U et S deux robinets placés à l'entrée et à

Fig. 173.



du corps de pompe. ouvre le robinet U, ferme le robinet S, la source entrera corps de pompe et p le piston de bas en Quand celui-ci sera au point le plus hau course, on fermera l net U, et l'on ouvrir binet S; alors l'eau du corps de pompe, et le piston descendra par son poids augmenté de celui du tirant T. Le piston étant au point le plus bas de sa course, on fermera de nou robinet S, on ouvrira le robinet U, et le piston exécute nouvelle course ascendante, et ainsi de suite. Ce mou de va-et-vient est ensuite utilisé, soit pour faire mouv pompe, soit pour faire tourner une manivelle. Tel est l cipe des machines à colonne d'eau.

La machine qui précède est à simple effet; les mach ce genre à double effet sont moins usitées. On a recon les tiges ou tirants des pistons résistent plus longtemps, ils ne servent, comme dans la machine à simple effet exercer une traction au lieu d'une pression qui est ic faible. Mais l'avantage le plus caractéristique résulte de le cylindre, étant ouvert à sa partie snpérieure, peut se n et se réparer facilement.

Les machines à colonne d'eau ont reçu des applicatio portantes. En 1808, M. de Reichenbach, célèbre ing bavarois, établit une machine de ce genre destinée à éle eaux salées de Reichenhall à une hauteur de 1035 mètres un développement de tuyaux de 109 kilomètres (27 li traversant un terrain montueux très-accidenté.

La première machine de ce genre qui ait été étab France est due à M. Juncker, ingénieur des mines; elle

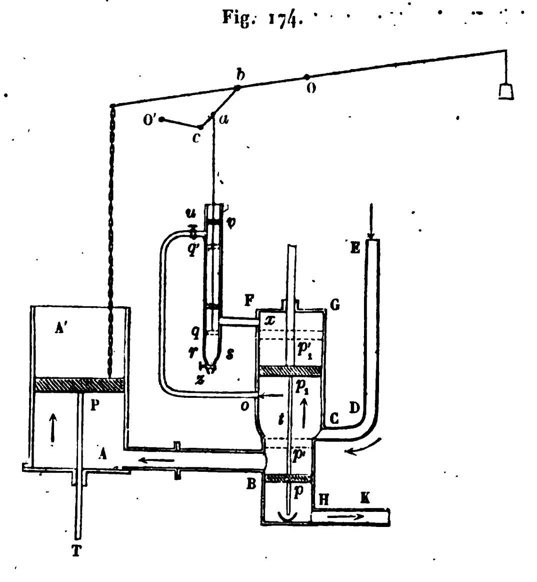
construite pour l'épuisement des eaux de la mine d'Huelgoat (Finistère). Nous en donnons ci-après une description sommaire.

DESCRIPTION SOMMAIRE DE LA MACHINE D'HUELGOAT.

La machine à colonne d'eau d'Huelgoat se compose (*fig.* 174) :

1°. D'un corps de pompe AA' dans lequel se meut le piston

Fig. 174.



moteur P. Celui-ci porte une tige ou tirant TP, laquelle fait mouvoir le piston d'une pompe foulante de bas en haut.

2°. D'un deuxième corps de pompe HF d'un diamètre plus petit. La partie supérieure CF du cylindre est d'un diamètre un peu plus grand que celui de la partie inférieure BH. Dans ce corps de pompe se meuvent deux pistons p, p_1, reliés entre eux par une tige pp_1 de longueur invariable; le piston supérieur p_1 s'appelle *piston d'aide* ou *piston auxiliaire;* le deuxième, *piston régulateur.* Le cylindre EF communique avec AA' par un conduit AB et avec la source par un tuyau DE.

3°. Enfin, à côté de ce dernier corps de pompe s'en trouve un troisième d'un plus petit diamètre, et communiquant avec

HF par deux conduits *ou*, *xq*, venant s'ouvrir, l'un au-dessous du cylindre p_1, lequel ne peut jamais descendre plus bas que l'ouverture *o*, l'autre au-dessus du même piston, lequel ne peut jamais dépasser l'ouverture *x*; le tuyau *ou* porte un robinet placé à son extrémité supérieure; un robinet *z* est placé à la partie inférieure du cylindre *uvrs*. Enfin deux pistons d'un égal diamètre et reliés par une tige de longueur invariable se meuvent dans le petit corps de pompe. Dans leur mouvement alternatif, ces deux pistons passent successivement au-dessus et au-dessous des ouvertures *u* et *q*. Le tirant *aq* est mû par un balancier à contre-poids, tournant autour du point O. Ce tirant est porté par une verge *bc* avec laquelle il s'articule; celle-ci s'articule à son tour avec le balancier et avec un rayon O'*c* mobile autour d'un point fixe O'. On sait que dans ce cas chaque point de la ligne *bc* décrit à très-peu près une ligne droite (*voir* page 378).

JEU DE LA MACHINE.

Les pistons étant dans la position que leur assigne la figure, l'eau de la source arrive par le canal EDC, s'introduit sous le piston P et le soulève. Les pistons *p*, p_1 ayant des surfaces inégales, reçoivent des pressions inégales de la part du liquide et sont soulevés.

Dans sa course ascendante, le piston p_1 entraîne l'eau qui est au-dessus de lui, et celle-ci se rend, par le conduit *xq*, au-dessous du piston inférieur dans le petit corps de pompe *sv*; de là elle s'écoule au dehors. On remarque aussi que, pendant le mouvement ascendant des pistons, une certaine quantité d'eau qu'on règle à volonté à l'aide du robinet *u*, se rend par le canal *ou* entre les deux pistons du petit corps de pompe. Mais, lorsque dans sa course ascendante le piston *p* a commencé de dépasser le bord inférieur B du conduit BA, l'eau du corps de pompe AA' trouvant une issue, s'écoule au dehors par le canal HK; alors le piston P, sollicité par son propre poids, auquel s'ajoute celui du tirant T, descend et fait prendre aux pistons du petit corps de pompe les deux positions pointillées

marquées sur la figure. A cet instant, l'eau qui est entre les deux pistons s'introduit au-dessus du piston p'_1, et le sollicite à descendre. Les deux pistons reprennent bientôt leurs positions primitives p, p_1, et les mêmes mouvements recommencent.

Pour arrêter la machine, il suffit évidemment de fermer les deux robinets u, z, ou seulement l'un d'eux.

RENDEMENT.

Dans la machine d'Huelgoat, la hauteur de chute est de 60^m, et le débit de 120^{mc} par minute. La mine qu'il faut épuiser est à 230^m au-dessous du sol ; la quantité d'eau qui s'y infiltre, et qu'il faut élever, est de $1^{mc},792$ par minute ; la course du piston de la pompe foulante est de $2^m,15$. Calculant successivement le travail moteur et le travail utile, on trouve

$$T_m = 60000^k \times 20^m = 1200000^{km},$$
$$T_u = 1792^k \times 230^m = 412160^{km}.$$

Par conséquent le rendement de la machine d'Huelgoat a pour valeur

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{412160}{1200000} = 0,341.$$

CALCUL DE L'INTERVALLE QUI DOIT SÉPARER LES PISTONS DU PETIT CORPS DE POMPE.

Supposons connue l'aire a de l'un p des deux pistons du cylindre HF, ainsi que l'intervalle l qui les sépare ; donnons-nous aussi la section α du petit corps de pompe, et proposons-nous de calculer l'aire a' du piston p_1, ainsi que la distance qui doit séparer le piston q du piston q' pour que la machine puisse fonctionner.

Soient z la hauteur verticale du piston p_1 considéré dans une position quelconque, et H celle du réservoir qui alimente la machine, comptées de la limite inférieure de la course du piston p_1. Nommons ϖ le poids du système des deux pistons, y la hauteur de l'eau au-dessus de p_1, D le poids du liquide sous l'unité de volume ; la pression de bas en haut due à la

hauteur de la colonne motrice aura pour valeur

$$a'\mathrm{HD} - a'\mathrm{D}z.$$

Mais la force contraire qui tend à faire descendre le système des deux pistons se compose :

Du poids ϖ;

Du poids $a'\mathrm{D}y$ de l'eau qui est au-dessus du piston p_1;

De la pression $a\mathrm{D}(\mathrm{H} + l - z)$ qui s'exerce sur le piston p; donc la force qui tend à faire monter les deux pistons p et p_1 a pour valeur, en nommant c leur course, et observant que $y + z = c$,

$$(1) \qquad \mathrm{F} = (a' - a)\mathrm{HD} - \varpi - a'\mathrm{D}c - a\mathrm{D}(l - z).$$

Soient λ l'intervalle des deux pistons q, q', et u la distance verticale du niveau de l'eau dans le petit cylindre, au-dessus de l'orifice x, pendant que se fait l'écoulement au-dessus du piston p'_1; la force motrice qui produit le mouvement descendant aura évidemment pour valeur

$$\mathrm{F}' = (a' - a)\mathrm{HD} - \varpi - a'\mathrm{D}c - a\mathrm{D}(l - z) - a'\mathrm{D}(y + u).$$

Mais

$$\alpha(\lambda - u) = a'y, \quad \text{d'où} \quad u = \lambda - \frac{a'}{\alpha}y;$$

donc

$$(2) \quad \mathrm{F}' = (a' - a)\mathrm{HD} - \varpi - a'\mathrm{D}c - a\mathrm{D}(l - z) - a'\mathrm{D}\lambda + a'\mathrm{D}y\left(\frac{a'}{\alpha} - 1\right).$$

Choisissons maintenant a' de telle sorte qu'on ait

$$(a' - a)\mathrm{HD} - \varpi - a'\mathrm{D}c - a\mathrm{D}l = 0,$$

d'où l'on tire

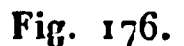
$$(3) \qquad a' = a\frac{\mathrm{H} + l}{\mathrm{H} - c} + \frac{\varpi}{\mathrm{D}(\mathrm{H} - c)};$$

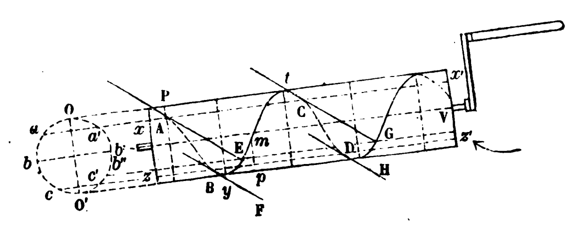
alors les deux valeurs de F et de F′ deviennent respectivement

$$(4) \qquad \mathrm{F} = a\mathrm{D}z,$$

$$(5) \qquad \mathrm{F}' = a\mathrm{D}z + a'\mathrm{D}y\left(\frac{a'}{\alpha} - 1\right) - a'\mathrm{D}\lambda.$$

Inclinons maintenant le cylindre à l'horizon, et supposons qu'on puisse mener à une même spire deux tangentes horizontales AE, BF (*fig.* 176). Le point A sera le point le plus


Fig. 176.



haut, et le point B le plus bas de la demi-spire. Enroulons comme précédemment un petit canal sur l'hélice, puis introduisons par l'ouverture A un grain de plomb ; ce corps descendra dans le canal AB et s'arrêtera au point le plus bas, où il restera en équilibre, si la vis est en repos.

Par les points A et B menons les deux génératrices xx', zz' du cylindre, et supposons que ces génératrices soient fixes dans l'espace. En imprimant à la machine un mouvement de rotation, toutes les génératrices viendront coïncider avec ces deux lignes sur lesquelles les points de l'hélice se superposeront successivement. Ne considérons pour le moment que la ligne zz'. Un point de l'hélice, tel que m, viendra par l'effet de la rotation de la vis se placer en un point p ; en même temps, la tangente à l'hélice menée par le point p sera dans le plan zBF tangent au cylindre le long de la génératrice zz' ; mais cette ligne aura dans ce plan tangent la même inclinaison sur zz' que la tangente BF, donc elle sera parallèle à BF, et par conséquent horizontale. Le grain de plomb abandonnera donc le point B pour venir se placer en p, c'est-à-dire au point le plus bas de la spire. Une nouvelle rotation de la vis produira une nouvelle translation du mobile le long de zz', et ainsi de suite. Maintenant menons un plan horizontal suivant la tangente AE, et soit E le point où ce plan vient couper la seconde moitié de la spire yt. Si nous supposons que la partie inférieure du cylindre soit plongée dans l'eau, de telle sorte que

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

MACHINES QUI SERVENT A ÉLEVER L'EAU A DE PETITES HAUTEURS.

VIS D'ARCHIMÈDE.

100. Concevons un cylindre droit sur lequel on aurait tracé des hélices. Si l'on enroule sur ce cylindre et le long de chaque hélice un petit cylindre creux, on aura la *vis d'Archimède*. Supposons d'abord le cylindre horizontal, puis par l'ouverture A d'un canal introduisons un petit corps pesant, comme

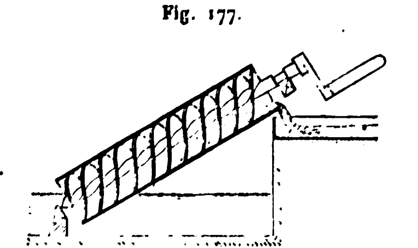
Fig. 175.

un grain de plomb ; ce grain de plomb descendra le long du tube et viendra s'arrêter au point le plus bas de la spire, où il restera en équilibre, si la vis est en repos. Mais si l'on fait tourner la machine, chaque point de l'hélice tel que *m* viendra, par l'effet de la rotation, se placer en un certain point *p*, et dès lors le corps pesant quittera le point B pour gagner le point le plus bas *p* de la spire ; bientôt après ce sera un nouveau point *n* de l'hélice qui viendra sur l'horizontale BF, et ainsi de suite ; enfin, après autant de rotations qu'il y a de spires, le grain de plomb sortira en F. On peut remarquer que le mobile, en se transportant de B en F, reste constamment sur l'horizontale BF supposée fixe dans le plan horizontal tangent au cylindre. Donc le mouvement circulaire continu de la vis d'Archimède se transforme en un mouvement rectiligne continu. Si le cylindre plongeait en partie dans l'eau par son extrémité A, la rotation de la vis amènerait l'eau au point F.

mier puisqu'il se projette sur l'arc $aOa'b''$. Donc cet air se dilatera, son élasticité deviendra moindre que celle de l'air extérieur, et alors une portion de l'arc hydrophore supérieur tombera dans la spire inférieure, afin de rétablir l'équilibre de pression; il y aura ainsi perte de travail utile. Pour éviter cet inconvénient, on perce le canal de petites ouvertures capillaires, qui suffisent pour maintenir la communication avec l'air extérieur, tout en ne laissant pas sortir le liquide.

Nous venons de décrire la vis telle qu'elle était employée par les anciens. On remplace aujourd'hui le cânal par une ou plusieurs cloisons (*fig.* 177), disposées dans un cylindre creux, à noyau, et qui sont engendrées par le *mouvement d'une droite qui s'appuyant à la fois sur l'axe du cylindre et sur une hélice tracée sur sa surface, reste constamment parallèle au plan de la base.* Ces surfaces hélicoïdales sont de même espèce que celles de la vis à filets carrés. On se fera une idée exacte de la vis d'Archimède, en imaginant une vis à filets carrés recouverte d'une feuille de papier. Ici la colonne liquide élevée par la machine est formée d'une infinité de filets hydrophores, qui diminuent de longueur à mesure qu'on s'approche du noyau intérieur; ces arcs hydrophores finissent même par devenir nuls, de sorte qu'à partir d'une certaine limite, l'air circule librement dans toute l'étendue des conduits.

Fig. 177.



Pour diminuer le poids de la machine, on rend fixes le cylindre extérieur, et le noyau intérieur; il n'y a de mobile que la surface hélicoïdale qui tourne en affleurant les deux cylindres entre lesquels elle est logée.

VIS HOLLANDAISE.

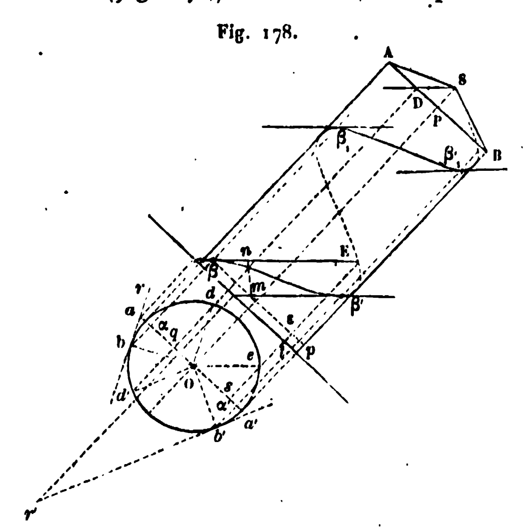
Les Hollandais, qui font un grand usage de la vis d'Archimède, suppriment le cylindre extérieur; ils renferment la ma-

chine dans une espèce de coursier dans lequel elle tourne avec une grande vitesse; ils emploient le vent comme moteur.

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA VIS D'ARCHIMÈDE.

101. Proposons-nous d'abord de mener à l'hélice une tangente horizontale (*fig.* 178). Pour cela, d'un point S pris sur

Fig. 178.



l'axe du cylindre, j'imagine des parallèles aux tangentes de la courbe; ces tangentes étant également inclinées sur l'axe, formeront un cône droit SAB. Cela posé, si par le point S je mène un plan horizontal SD, ce plan coupera le cône suivant deux génératrices horizontales, et ces génératrices seront parallèles aux tangentes demandées. Remarquons maintenant que les pieds des génératrices dont il s'agit se projettent verticalement au point D, et horizontalement en d, d'; ces lignes auront donc pour projections (Od, SD) et (Od', SD). Par conséquent, les tangentes br, $b'r'$, parallèles respectivement aux rayons Od, Od' seront les projections demandées. Maintenant si je ramène les points b, b', sur la projection verticale de l'hélice, en β, β'..., et β_1, β'_1..., j'aurai les divers points de contact des tangentes horizontales. On voit que *le problème proposé sera possible toutes les fois que le plan horizontal*

SD *coupera* AB, *c'est-à-dire lorsque la vis fera avec l'horizon un angle moindre que celui que les tangentes à l'hélice font avec les génératrices du cylindre.* Il résulte de là que la vis d'Archimède pourra fonctionner pour toutes les inclinaisons satisfaisant à la condition précédente.

Soit h le pas de l'hélice directrice; si pour un cylindre quelconque de même axe que celui de la vis on pose, pour abréger,

$$\mathrm{ASP} = g, \quad \mathrm{DSP} = i, \quad \mathrm{AP} = r,$$

on aura

$$(1) \qquad h = \frac{2\pi r}{\operatorname{tang} g},$$

d'où

$$r = \frac{h}{2\pi} \operatorname{tang} g.$$

Mais les arcs hydrophores deviendront nuls si $g = i$, donc le rayon du cylindre jouissant de cette propriété aura pour valeur

$$(2) \qquad r_0 = \frac{h}{2\pi} \operatorname{tang} i.$$

Pour que la vis puisse fonctionner sans perte de travail utile, il faudra par conséquent lui donner un noyau dont le rayon soit moindre que la valeur ci-dessus.

Posons, pour abréger,

$$\operatorname{arc} ab = r\varphi, \quad \operatorname{arc} aa'c = r\varphi_1;$$

d'abord les triangles rectangles ASP, DSP donnent

$$r = \mathrm{SP}.\operatorname{tang} g, \quad \mathrm{DP} = \mathrm{SP}.\operatorname{tang} i,$$

d'où

$$\mathrm{DP} \quad \text{ou} \quad \mathrm{O}q = r\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} g}.$$

Mais on tire du triangle $\mathrm{O}dq$,

$$\mathrm{O}q = r\cos(90^\circ - \varphi) = r\sin\varphi;$$

par conséquent

(3) $$\sin \varphi = \frac{\text{tang } i}{\text{tang } g}.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$E\varepsilon = \frac{\text{arc } ba'e}{\text{tang } g};$$

remplaçant arc $ba'e$ par sa valeur

$$\text{arc } ba'e = r(\varphi_1 - \varphi),$$

il vient

$$E\varepsilon = \frac{r(\varphi_1 - \varphi)}{\text{tang } g}.$$

Le triangle rectangle $E\varepsilon\beta$ donne à son tour

$$\beta\varepsilon = E\varepsilon . \text{tang } i;$$

donc aussi

$$\beta\varepsilon = r(\varphi_1 - \varphi)\frac{\text{tang } i}{\text{tang } g}.$$

Enfin

$$\beta\varepsilon = \alpha s = O\alpha + Os = r(\cos\varphi - \cos\varphi_1);$$

comparant les deux valeurs de $\beta\varepsilon$, on obtient

(4) $$\varphi_1 - \varphi = (\cos\varphi - \cos\varphi_1)\frac{\text{tang } g}{\text{tang } i}.$$

Remplaçant $\frac{\text{tang } g}{\text{tang } i}$ par sa valeur tirée de (3), on trouve simplement

(5) $$\varphi_1 - \varphi = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi_1}{\sin\varphi}.$$

Maintenant soient ν un élément infiniment petit de l'arc hydrophore, et ν' sa projection sur la cercle de base, on aura évidemment

$$\nu' = \nu \sin g;$$

pour l'élément suivant, on aura de même

$$\nu'_1 = \nu_1 \sin g,$$

et ainsi de suite.

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, et nommant S la longueur totale de l'arc hydrophore, il vient

$$r(\varphi_1 - \varphi) = S \sin g,$$

d'où

$$(6) \qquad S = \frac{r(\varphi_1 - \varphi)}{\sin g}.$$

La distance verticale, $mn = \lambda$, de deux tangentes horizontales se calcule aussi sans difficulté. On a d'abord

$$\beta' p = \frac{r(\pi - 2\varphi)}{\tan g\, g};$$

ensuite le triangle rectangle $\beta' pm$ donne

$$mp = \beta' p \tan g\, i = r(\pi - 2\varphi) \frac{\tan g\, i}{\tan g\, g}.$$

On a encore

$$\beta p = aa' = O\alpha + O\alpha' = r\cos\varphi - r\cos(180^\circ - \varphi) = 2r\cos\varphi,$$

par suite

$$m\beta = 2r\cos\varphi - r(\pi - 2\varphi)\frac{\tan g\, i}{\tan g\, g};$$

enfin le triangle rectangle $mn\beta$ donne

$$\lambda = m\beta . \cos i,$$

d'où l'on conclut

$$(7) \qquad \lambda = 2r\cos i\left[\cos\varphi - \left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)\frac{\tan g\, i}{\tan g\, g}\right].$$

Si l'on suppose $i = g$, on a, par la formule (3),

$$\sin\varphi = 1, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Au moyen de cette valeur la formule (5) devient

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi - \cos\varphi_1,$$

laquelle ne saurait subsister pour des valeurs quelconques de φ_1; car s'il en était ainsi, l'on aurait également

$$(\varphi_1 + \delta\varphi_1) = \frac{1}{2}\pi - \cos(\varphi_1 + \delta\varphi_1).$$

Développant et supposant $\delta\varphi_1$ infiniment petit, il v

$$\delta\varphi_1 = \sin\varphi_1\,\delta\varphi_1\,;$$

d'où

$$\sin\varphi_1 = 1\,,\quad \varphi_1 = \frac{1}{2}\pi.$$

Au moyen de ces valeurs de φ et de φ_1, la formule (
ensuite

$$S = 0,$$

ce qui est d'ailleurs une conséquence de la construc
métrique des tangentes horizontales.

On peut aussi s'assurer que la formule (7) se rédu
pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

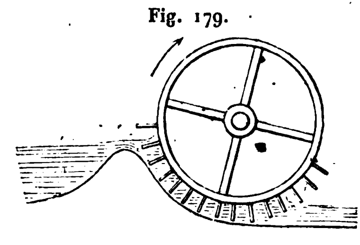
En général, pour calculer la longueur d'un arc hyd
on commencera par déterminer φ au moyen de l'équat
la formule (5) fera connaître ensuite φ_1; enfin l'arc
phore sera donné par la formule (6). Pour éviter c
résoudre, dans chaque cas particulier, l'équation t
dante (5), on a trouvé préférable de calculer une T
valeurs de la différence $\varphi_1 - \varphi$. Dans cette Table, que n
nons ci-après, les valeurs de φ_1 et de $\varphi_1 - \varphi$ sont ex
en degrés centésimaux.

Table des valeurs de $\varphi_1 - \varphi$.

φ	$\varphi_1 - \varphi$	φ	$\varphi_1 - \varphi$
0	400	55	138
5	338	60	122
10	308	65	107
15	284	70	91
20	263	75	76
25	243	80	61
30	224	85	45
35	205	90	30
40	188	95	15
45	170	100	0
50	154		

de la largeur de la roue. On la fait tourner dans un coursier,

Fig. 179.

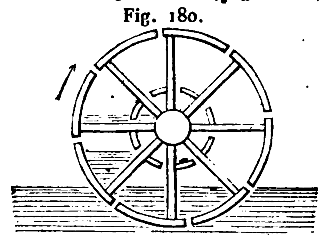


ou entre deux murs verticaux dont la distance diffère peu de la largeur de la roue. Les palettes en tournant dans l'eau élèvent celle-ci à peu près à la hauteur du centre de la roue, et la déversent sur le talus du coursier.

TYMPAN DE VITRUVE.

La *roue à tympan* (*fig.* 180) consiste en un *tambour* ou cy-

Fig. 180.



lindre creux divisé par des cloisons dont les plans prolongés vont passer par l'axe du cylindre. Chacune de ces cloisons s'ouvre sur la surface du tambour. Un noyau creux monté sur le même axe, et communiquant avec le dehors, porte aussi des cloisons qui s'ouvrent dans les premières. Quand la roue tourne, les cloisons du tympan s'emplissent d'eau; celle-ci passe dans le noyau quand elle arrive à la hauteur de l'axe, et se répand ensuite au dehors.

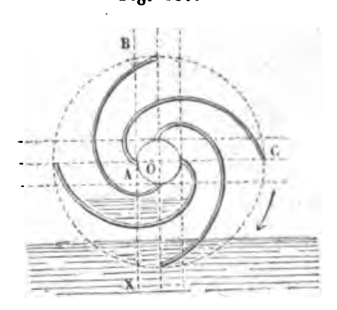
Cette machine porte le nom de *tympan de Vitruve*, parce qu'elle se trouve décrite dans l'ouvrage du célèbre architecte romain.

TYMPAN A DÉVELOPPANTES DE CERCLE.

On remplace avec avantage les cloisons du tympan de Vitruve par des cloisons cylindriques ayant pour bases des développantes de cercle (*fig.* 181). Ainsi le profil intérieur de la cloison AC est une développante engendrée par le point A de la tangente AB roulant sur le noyau O de la roue. L'eau en entrant dans la roue ne se logeant pas dans les angles, comme dans le tympan de Vitruve, il y a moins de chocs, et par consé-

quent moins de pertes de travail. En second lieu, les cloisons étant normales à la verticale AX, le centre de gravité de l'eau élevée par chaque cloison est peu éloigné de cette verticale; il est donc plus près de l'axe que dans le tympan de Vitruve. La résistance agissant sur un levier moins long, il faut une force moindre pour mouvoir la roue. Ce perfectionnement a été proposé par Lafaye en 1817.

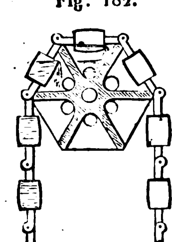

Fig. 181.



NORIA.

Une *noria* (*fig.* 182) consiste en une chaîne sans fin, tournant sur deux poulies dont les centres sont situés sur la même verticale. L'une de ces poulies est placée à la hauteur où l'on veut élever l'eau, l'autre dans le réservoir. Cette chaîne porte des crochets auxquels sont attachés des godets de distance en distance. Quand ces godets arrivent à la partie supérieure, ils se vident dans le réservoir. La poulie qui tourne dans l'eau n'étant pas absolument nécessaire, on la supprime dans la plupart des cas.

Fig. 182.

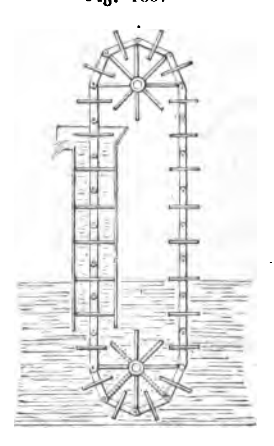


CHAPELET.

Le *chapelet* (*fig.* 183) consiste en une chaîne sans fin qui porte de distance en distance des rondelles qu'on nomme *grains* ou *patenôtres;* cette corde s'enroule sur une poulie ayant la forme d'une étoile et placé à la hauteur à laquelle on veut élever le liquide. Si le chapelet est vertical, le plus souvent la chaîne sans fin baigne librement dans l'eau. S'il est oblique, on fait tourner la chaîne sur une deuxième poulie semblable à

la première, et située dans le réservoir où l'eau doit être puisée.

Fig. 183.



Un cylindre qu'on nomme *buse* plonge dans le liquide; c'est dans ce cylindre que se fait le mouvement de l'eau entraînée par les grains.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

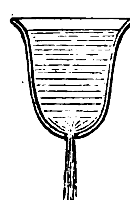
INÉGALITÉ DE PRESSION DANS LES FLUIDES EN MOUVEMENT.

103. Quand un fluide est en repos, chaque molécule éprouve dans tous les sens une pression égale; s'il est en mouvement, la pression varie d'une direction à une autre et présente des différences d'autant plus grandes que la vitesse est elle-même plus grande. Dans les essais qu'on a faits pour lancer des projectiles, en employant la force expansive de la vapeur d'eau, on a reconnu par exemple que la pression était très-faible contre les parois du canon, tandis qu'elle était très-grande dans le sens de l'axe.

PARALLÉLISME DES TRANCHES.

Considérons un vase dont les sections horizontales varient par degrés insensibles. Ce vase est percé d'un petit orifice à sa paroi inférieure supposée très-mince. On l'emplit d'eau jusqu'à une certaine hauteur, puis on laisse écouler le liquide, mais en maintenant le niveau constant. Alors si l'on répand à la surface de la sciure de bois très-ténue, ayant à peu près la même densité que l'eau, on observe les phénomènes suivants:

Fig. 184.



1°. Les molécules de poussière descendent verticalement dans le liquide jusqu'à une petite distance de l'orifice;

2°. Les molécules de chaque section horizontale se meuvent avec la même vitesse. De là il faut conclure que les tranches horizontales infiniment minces, dans lesquelles on peut con-

cevoir le liquide décomposé, se meuvent verticalement comme étant d'une seule pièce, et en se modelant successivement sur les sections du vase qu'elles traversent, prenant à chaque instant une vitesse qui fasse passer dans l'élément du temps la même quantité de liquide à travers chaque section horizontale.

Lorsque les particules de poussière arrivent à une petite distance de l'orifice, leur direction s'infléchit, la *veine liquide* se contracte, et cette contraction se continue jusqu'à une petite distance de l'orifice, où elle atteint sa valeur maxima. Quand l'orifice est très-étroit par rapport aux sections transversales du vase, la contraction maxima se fait à très-peu près à une distance égale au diamètre de l'orifice; cette distance diminue quand le diamètre augmente. A partir du point de contraction maxima, les filets liquides reprennent une direction verticale, mais bientôt ils divergent de nouveau pour se diviser, et le liquide tombe en petites gouttelettes.

INVERSION DE LA VEINE LIQUIDE.

Quand l'orifice par où se fait l'écoulement n'est pas circulaire, les sections transversales de la veine liquide se modifient à mesure qu'on s'éloigne du vase, et cela de *telle sorte, que les lignes diamétrales les plus longues, dans l'orifice, deviennent les plus courtes dans la veine*. Ce phénomène a reçu le nom d'*inversion de la veine liquide*.

Lorsque, par exemple, l'orifice est un carré de $0^{m},30$ de côté, ces sections transversales sont telles qu'on les voit représentées dans le tableau suivant (*fig.* 185) où les distances sont comptées de la paroi intérieure du vase.

Tableau des sections transversales de la veine liquide.

Fig. 185.

SECTIONS DE LA VEINE.	DISTANCES.
	0^m
	$0^m,185$
	$0^m,417$
	$0^m,50$
	$0^m,582$

VITESSE D'ÉCOULEMENT.

104. Si l'on désigne par H la hauteur verticale du niveau constant du liquide au-dessus du centre de l'orifice supposé très-étroit par rapport aux sections du vase, et par v la vitesse d'écoulement à l'endroit de la plus grande contraction de la veine, on trouve, par l'expérience et par le calcul, que l'on a à très-peu près

$$v = \sqrt{2gH}. \tag{1}$$

De là il résulte que *la vitesse d'écoulement d'un liquide est égale à celle d'un mobile tombant dans le vide d'une hauteur égale à celle du niveau dans le réservoir.* Ce théorème est dû à Torricelli.

DÉPENSE EN UNE SECONDE.

Soient a l'aire de l'orifice, et α l'aire de la section contractée ; la dépense en une seconde sera

$$Q = \alpha\sqrt{2gH}.$$

Posant

$$\frac{\alpha}{a} = f,$$

la valeur de Q devient

$$Q = af\sqrt{2gH}. \tag{2}$$

Le coefficient de contraction f se détermine facilement par l'expérience; on recueille pendant un temps donné l'eau qui sort du réservoir, et l'on en déduit la dépense en une seconde; alors l'équation (2) fait connaître f. On a trouvé de la sorte les valeurs ci-après :

Si $H > 10$ fois le diamètre de l'orifice,

$$f = 0{,}615.$$

Si $H < 10$ fois le diamètre de l'orifice,

$$f = 0{,}66.$$

Si le vase est pourvu d'un ajutage cylindrique dont la longueur soit au moins égale à 2 fois ou 2 et $\frac{1}{2}$ fois le diamètre de l'orifice,

$$f = 0{,}82.$$

Cette augmentation dans la valeur du coefficient de la dépense est due à ce que la contraction de la veine produit la raréfaction de l'air dans le tuyau; alors la pression atmosphérique qui agit à l'orifice gonfle la veine, le tuyau s'emplit et le liquide coule *gueule bée*.

Quand l'écoulement a lieu par une ouverture percée dans la paroi latérale du vase, les formules précédentes ne subsistent qu'autant que l'orifice est placé à une certaine profondeur au-dessous du niveau du liquide.

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE DANS L'HYPOTHÈSE DU PARALLÉLISME DES TRANCHES.

CAS OU LE NIVEAU EST CONSTANT.

Considérons le mouvement d'une tranche depuis le niveau de l'eau jusqu'à sa sortie du vase. Le régime étant établi, on peut supposer que le centre de gravité de la tranche viendra passer par le centre de l'orifice. Soient H la hauteur verticale du niveau comptée de ce dernier point, et P le poids de la tranche, v étant la vitesse du liquide à la surface, u la vitesse à sa sortie,

on aura, en vertu du principe des forces vives, et en négligeant les frottements contre les parois du vase,

$$PH = \frac{1}{2}\Sigma m\,(u^2 - v^2).$$

Mais u et v sont les mêmes pour toutes les molécules, du moins à très-peu près; on peut donc écrire

$$PH = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\,\Sigma m = \frac{1}{2}\frac{P}{g}(u^2 - v^2);$$

de là on tire

$$u^2 - v^2 = 2gH.$$

Soient A la section horizontale du vase qui répond au niveau du liquide, et a l'aire de l'orifice; on aura

$$Av = au, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{a}{A}u.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$(3) \qquad u = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{a^2}{A^2}}},$$

ou bien, parce que $\frac{a}{A}$ est supposé très-petit,

$$(4) \qquad u = \sqrt{2gH}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{A^2}\right).$$

Négligeant le terme $\frac{1}{2}\frac{a^2}{A^2}$, on a simplement

$$(5) \qquad u = \sqrt{2gH},$$

ce qui est le théorème de Torricelli. Les valeurs de u déduites de l'expérience ne diffèrent que de deux ou trois centièmes des valeurs calculées par la formule (5).

CAS OU LE NIVEAU EST VARIABLE.

* Considérons un vase prismatique dont la section est A, nommons h la hauteur variable du niveau du liquide au-dessus du centre de l'orifice a, et nous aurons à chaque instant, en

supposant très-petit le rapport $\frac{a}{A}$,

$$(6)\qquad \begin{cases} u = \sqrt{2gh}, \\ au = Av, \\ v = -\frac{dh}{dt}. \end{cases}$$

Dans ces formules, u désigne toujours la vitesse à l'orifice, et v la vitesse au niveau. Éliminant u et v entre ces équations, il vient

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g}.dt.$$

Intégrant, on trouve

$$2\sqrt{h} = \text{const} - \frac{a}{A}t\sqrt{2g}.$$

Soit H la hauteur initiale du liquide, on aura à la fois

$$h = H, \quad t = 0,$$

et par suite

$$\text{const} = 2\sqrt{H}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, il vient

$$(7)\qquad \sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{1}{2}\frac{a}{A}t\sqrt{2g}.$$

Substituant la valeur de $\sqrt{h}$ dans la deuxième des équations (6), on trouve

$$(8)\qquad u = \sqrt{2gH} - \frac{a}{A}gt.$$

La deuxième des équations citées donne ensuite

$$(9)\qquad v = \frac{a}{A}\sqrt{2gH} - \frac{a^2}{A^2}gt.$$

Les équations (7), (8), (9), résolvent complétement le problème proposé.

TEMPS QUE LE VASE MET A SE VIDER COMPLÉTEMENT.

Si dans la formule (7) on fait $h = 0$, et qu'on résolve

l'équation résultante par rapport à t, on aura le temps que le vase mettra à se vider, savoir :

(10) $$T = 2\frac{A}{a}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

Cette formule pourra servir à l'établissement des clepsydres.

Si le niveau était constant, le temps $\mathfrak{T}$ nécessaire à l'écoulement d'un volume d'eau égal au volume AH du vase serait donné par l'équation

$$AH = a\mathfrak{T}\sqrt{2gH},$$

de laquelle on tire

(11) $$\mathfrak{T} = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

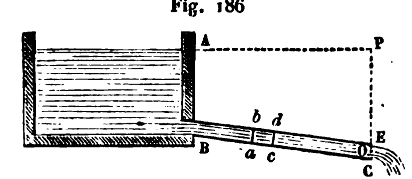
On voit que cette dernière valeur est moitié moindre que la première.

Donc *un vase met à se vider un temps double de celui que mettrait à sortir du même vase un égal volume d'eau si le niveau était constant.*

MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES TUYAUX DE CONDUITE.

105. Soit AB un réservoir (*fig.* 186) dans lequel l'eau est maintenue à un niveau constant; si l'on fait pour abréger OP=H, $ab=\Delta$, et qu'on nomme λ le développement de l'ensemble des tuyaux de conduite, supposés tous de même diamètre et formant une courbe continue, la vitesse du liquide à l'orifice O aura pour valeur

Fig. 186



(1) $$u = -0{,}0249 + 26{,}793\sqrt{\frac{H\Delta}{\lambda}}.$$

On aura ensuite pour la dépense en une seconde

(2) $$Q = \frac{1}{4}\pi\Delta^2 u.$$

On peut remarquer que les formules (1) et (2) contiennent

cinq quantités variables u, H, Δ, λ, Q. Connaissant trois de ces quantités, les formules citées feront connaître les deux autres.

Supposons, par exemple, que l'on connaisse

La différence de niveau H des points A et O,
La longueur λ des tuyaux de conduite,
La dépense Q en une seconde,

et qu'on veuille déterminer

Le diamètre des conduits et la vitesse d'écoulement.

Si dans l'équation (2) on met la valeur de u donnée par la formule (1), on trouve

$$Q = -\Delta^2(0{,}019) + \Delta^2(21{,}043)\sqrt{\frac{H\Delta}{\lambda}}.$$

Si l'on néglige le premier terme qui est très-petit, il vient

$$(3) \qquad \Delta_0 = \sqrt[5]{\frac{\lambda}{H}\left(\frac{Q}{21{,}043}\right)^2}.$$

L'équation (2) donne ensuite

$$(4) \qquad u = \frac{4Q}{\pi\Delta^2}.$$

Si l'on veut approcher davantage de la valeur de Δ, on posera

$$\Delta = \Delta_0 + \partial\Delta_0;$$

on substituera dans la valeur précédente de Q, et en négligeant les termes du deuxième ordre, par rapport à $\partial\Delta_0$, on aura une équation du premier degré, qui fera connaître la correction $\partial\Delta_0$, et ainsi de suite.

Supposons encore que l'on connaisse la longueur λ des tuyaux de conduite, leur diamètre Δ, la dépense Q en une seconde, et qu'on veuille déterminer la vitesse u d'écoulement, ainsi que la différence de niveau H des points A et O.

D'abord la vitesse d'écoulement sera donnée par l'équation (4); on déduit ensuite de la formule (1), en négligeant le

premier terme,

$$H = \left[\frac{4Q}{\pi\Delta^2(26{,}793)}\right]^2 \frac{\lambda}{\Delta}. \tag{5}$$

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉCOULEMENT DE L'EA TUYAU DE CONDUITE.

Lorsqu'un liquide se meut dans un tuyau, les m frottent contre ses parois perdent à chaque instant tesse, et de là résulte un ralentissement qui se f sentir dans toute la masse liquide; mais ici la résis mouvement n'est pas proportionnelle à la pressi pour les corps solides; elle paraît même indépendan du liquide, et n'être due qu'à sa vitesse et aux dim tuyaux. D'après M. de Prony,

$$F = \frac{D}{g} \varepsilon s (\alpha u' + \beta u'^2),$$

dans laquelle D est le poids de l'eau sous l'unité d ε le contour de la section droite du tuyau, s la lon nimant petite d'une tranche liquide, u' sa vitesse dans le conduit. Enfin α et β sont des coefficients qu valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 0{,}00017, \\ \beta = 0{,}003416. \end{array}\right. \tag{6}$$

Considérons le mouvement d'une tranche depuis A jusqu'à sa sortie en O par un orifice ayant a' pou u étant la vitesse d'écoulement, et u' la vitesse dans on aura, en désignant par a la section du conduit,

$$au' = a'u, \quad \text{d'où} \quad u' = \frac{a'}{a} u;$$

par suite, la valeur de F devient

$$F = \frac{a'}{a} \frac{D}{g} \varepsilon s \left(\alpha u + \frac{a'}{a} \beta u^2\right). \tag{7}$$

Soit P le poids de la tranche liquide; si l'on négli tements contre les parois dans le réservoir, et qu'c

très-petit le rapport $\frac{a'}{A}$ de l'aire de l'orifice à celle de la section du réservoir qui répond au niveau de l'eau, on aura, en vertu du principe des forces vives,

$$PH - F\lambda = \frac{1}{2} u^2 \Sigma m;$$

remplaçant F par sa valeur (7), il vient

$$PH - \frac{a'}{a}\frac{D}{g}\varepsilon\,\lambda s\left(\alpha u + \frac{a'}{a}\beta u^2\right) = \frac{1}{2} u^2 \frac{P}{g}.$$

Supposons que la tranche P vienne occuper, dans le conduit, le volume *abcd*, on aura

$$P = a D s, \quad \text{d'où} \quad D s = \frac{P}{a}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, et supprimant le facteur commun P, on trouve

$$(8) \qquad 2gH = u^2 + 2\frac{a'}{a}\frac{\varepsilon\lambda}{a}\left(\alpha u + \frac{a'}{a}\beta u^2\right).$$

Supposant le tuyau circulaire, et nommant Δ son diamètre, on a

$$\varepsilon = \pi\Delta, \quad a = \frac{1}{4}\pi\Delta^2;$$

négligeant dans (8) le premier terme du deuxième membre que l'expérience démontre être très-petit par rapport au deuxième, il vient simplement, en prenant $a' = a$,

$$\beta u^2 + \alpha u - \frac{gH\Delta}{4\lambda} = 0.$$

Résolvant par rapport à u, on trouve

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{gH\Delta}{4\beta\lambda}}.$$

Négligeant encore le premier terme sous le radical, on obtient enfin

$$u = -0{,}0249 + 26{,}793\sqrt{\frac{H\Delta}{\lambda}};$$

ce qui est la formule (1) donnée au commencement (
méro.

Supposons maintenant que la tranche infiniment 1
liquide circule dans une série de conduits dont les d
vont toujours en diminuant à partir du réservoir. L
ment dans le tuyau principal sera

$$F_1 = \frac{D}{g} \varepsilon_1 s_1 (\alpha u_1 + \beta u_1^2).$$

Mais le poids et le volume de la couche liquide rest
stants, on a

$$D a_1 s_1 = P, \quad a_1 u_1 = a' u,$$

en nommant a' l'ouverture du tuyau de sortie, et plu
reusement la section contractée; de là on tire

$$D s_1 = \frac{P}{a_1}, \quad u_1 = \frac{a'}{a_1} u.$$

Substituant ces valeurs dans celle de F_1, il vient

$$F_1 = \frac{a'}{a_1} \frac{P}{g} \frac{\varepsilon_1}{a_1} \left(\alpha u + \frac{a'}{a_1} \beta u^2\right).$$

Soit λ_1 le chemin total parcouru par la couche liquide
conduit proposé; le travail dû à ce frottement sera

$$F_1 \lambda_1 = \frac{a'}{a_1} \frac{P}{g} \frac{\varepsilon_1 \lambda_1}{a_1} \left(\alpha u + \frac{a'}{a_1} \beta u^2\right).$$

Pareillement, le travail absorbé par le frottement dan
duit suivant aura pour expression

$$F_2 \lambda_2 = \frac{a'}{a_2} \frac{P}{g} \frac{\varepsilon_2 \lambda_2}{a_2} \left(\alpha u + \frac{a'}{a_2} \beta u_2\right),$$

et ainsi de suite. Enfin le travail dû au frottement dan
duit de sortie, sera

$$F\lambda = \frac{a'}{a} \frac{P}{g} \frac{\varepsilon \lambda}{a} \left(\alpha u + \frac{a'}{a} \beta u^2\right).$$

Donc on aura, en vertu du principe des forces vive

négligeant la vitesse dans le réservoir,

$$\mathrm{PH}-\frac{a'}{a_1}\frac{\mathrm{P}}{g}\frac{\varepsilon_1\lambda_1}{a_1}\left(\alpha u+\frac{a'}{a_1}\beta u^2\right)-\frac{a'}{a_2}\frac{\mathrm{P}}{g}\frac{\varepsilon_2\lambda_2}{a_2}\left(\alpha u+\frac{a'}{a_2}\beta u^2\right)-\ldots$$
$$-\frac{a'}{a}\frac{\mathrm{P}}{g}\frac{\varepsilon\lambda}{a}\left(\alpha u+\frac{a'}{a}\beta u^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{P}}{g}u^2.$$

Cette équation peut s'écrire

$$2g\mathrm{H}=u^2+2\Sigma\frac{a'}{a}\frac{\varepsilon\lambda}{a}\left(\alpha u+\frac{a'}{a}\beta u^2\right),$$

le signe Σ s'étendant à tous les conduits dans lesquels circule la couche liquide. Résolvant par rapport à u, il vient, en définitive,

$$(9)\quad u=\frac{-\alpha\Sigma\frac{a'}{a}\frac{\varepsilon\lambda}{a}+\sqrt{2g\mathrm{H}\left[1+2\beta\Sigma\left(\frac{a'}{a}\right)^2\frac{\varepsilon\lambda}{a}\right]+\left(\alpha\Sigma\frac{a'}{a}\frac{\varepsilon\lambda}{a}\right)^2}}{1+2\beta\Sigma\left(\frac{a'}{a}\right)^2\frac{\varepsilon\lambda}{a}}.$$

Si l'on néglige les termes affectés du facteur α, on aura la formule plus simple, mais moins exacte,

$$(10)\quad u=\sqrt{\frac{2g\mathrm{H}}{1+2\beta\Sigma\left(\frac{a'}{a}\right)^2\frac{\varepsilon\lambda}{a}}}.$$

En posant

$$\alpha=0,\quad \beta=0,$$

dans la formule (9), on retombe sur le théorème de Torricelli.

DU MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES RIGOLES ET LES CANAUX DÉCOUVERTS.

106. Si la pente d'un canal est constante, peu considérable, et le profil partout le même, du moins à très-peu près, le mouvement de l'eau est uniforme. On dit alors que *le régime du canal est uniforme*. L'expérience démontre que la résistance au mouvement due au frottement du liquide contre le fond et les parois du canal est encore donnée par la formule

$$(1)\quad \mathrm{F}=\frac{\mathrm{D}}{g}\varepsilon s(\alpha u+\beta u^2),$$

dans laquelle ε est *le périmètre mouillé* de la section Quant aux coefficients α et β, ils ont ici pour valeurs

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha = 0{,}000436, \\ \beta = 0{,}003034. \end{cases}$$

On trouve ensuite par les mêmes considérations qu'au 1 précédent, et en adoptant la même notation,

$$(3) \qquad \beta u^2 + \alpha u = g \frac{a}{\varepsilon} \frac{H}{\lambda}.$$

Si l'on pose, selon l'usage,

$$\frac{a}{\varepsilon} = R, \quad \frac{H}{\lambda} = i,$$

la formule (3) devient

$$(4) \qquad \beta u^2 + \alpha u^2 = gRi.$$

Si λ s'écarte peu de l'horizontale, $\frac{H}{\lambda} = i$ représentera peu près la pente du canal par mètre courant. La quanti nomme *rayon moyen*. En résolvant l'équation (4) par r à u, on trouve

$$(5) \qquad u = -0^m{,}071852 + \sqrt{0{,}00516276 + 3232{,}96\,Ri}.$$

Si sous le radical on néglige le premier terme qui est trè par rapport au deuxième, il vient

$$(6) \qquad u = -0^m{,}071852 + 56{,}86\sqrt{Ri}.$$

La vitesse étant connue, la dépense en une seconde aur valeur

$$(7) \qquad Q = au.$$

On peut remarquer que les équations (5) et (7) conti cinq quantités variables u, Q, a, ε, i; connaissant trois elles, les équations citées feront connaître les deux autr équations serviront ainsi à résoudre les diverses questi se présentent dans l'établissement des canaux.

VITESSE MAXIMA D'UN COURANT.

107. Si l'on fait une section perpendiculaire à la direction d'un courant d'eau, la vitesse ne sera pas la même aux divers points de cette section; il est clair qu'elle sera moindre au fond et sur le contour du périmètre mouillé, qu'à la surface et dans l'intérieur du liquide. Pour déterminer à quelle profondeur a lieu la vitesse maxima, on attache à un fil (*fig.* 187) deux petites boules de cire, dont l'une est un peu plus légère, et l'autre un peu plus dense que l'eau; en les mettant sur le liquide, on observe que celle qui plonge prend les devants sur celle qui flotte. On a reconnu de la sorte que la vitesse maxima avait lieu un peu au-dessous de la surface.

Fig. 187.

MESURE DE LA VITESSE D'UN COURANT.

Le moyen le plus simple de mesurer la vitesse à la surface d'un courant, consiste à faire flotter un petit corps qui s'élève très-peu au-dessus de l'eau. On note le temps que ce flotteur met à passer entre deux points de repère dont la distance a été mesurée avec soin, et l'on divise ensuite cet espace par le temps observé; le quotient de la division est la valeur de la vitesse cherchée.

VITESSE MOYENNE D'UN COURANT.

La vitesse moyenne d'un courant est celle qui multipliée par la section du canal donne la dépense.

Connaissant la pente i d'un canal et son rayon moyen $R=\frac{a}{c}$, la formule (5) du n° **106**, fera connaître la vitesse moyenne u. Mais on préfère généralement déterminer par l'expérience la vitesse à la surface, pour en déduire ensuite la vitesse moyenne, et même la vitesse au fond; pour cela, on se sert des deux formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= v\,\frac{v + 2,73187}{v + 3,1523}, \\ w &= 2u - v, \end{aligned} \right.$$

qui sont dues à M. de Prony, et dans lesquelles u dé vitesse moyenne, v la vitesse à la surface, w la vitesse a Dans le cas le plus général

$$u > 0^{m},20, \quad u < 1^{m},50;$$

alors, si on néglige les termes du deuxième ordre uv et sont peu différents, on a simplement

$$(2) \qquad u = (0,866)\, v,$$

dont on se contente souvent dans la pratique et qui fou degré d'exactitude assez satisfaisant.

Pour abréger le calcul de la vitesse u donnée par mière des formules (1), on a formé une Table des valeu à différentes vitesses.

TABLE DES VALEURS DE $\frac{u}{v}$.

v	$0^{m},5$,	1^{m},	$1^{m},5$,	2^{m},	$2^{m},5$,	:
$\frac{u}{v}$	$0^{m},725$,	$0^{m},812$,	$0^{m},832$,	$0^{m},848$,	$0^{m},862$,	c

JAUGEAGE D'UN COURS D'EAU.

Jauger un cours d'eau, c'est mesurer sa dépense seconde. A cet effet, on détermine la vitesse moyenne d rant, et on la multiplie par l'aire d'une section faite canal, perpendiculairement à sa direction.

Pour connaître la section du canal, on tend une cha (*fig.* 188) d'un bord à l'autre, puis en longeant la chaîn un bateau, on fait des sonda distance en distance; on n les distances horizontales A cd,..., comprises entre les où on laisse tomber la sonc mesure aussi les longueurs b ds,..., des sondes; avec ces données, on construit une semblable à la section du canal, et l'on mesure ensuite de celle-ci, d'où l'on conclut sans peine l'aire cherchée

Fig. 188.

DÉPENSE PAR UNE VANNE.

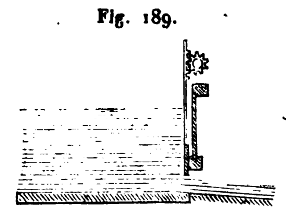
Si l'on nomme H la hauteur du niveau au-dessus du fond du coursier, h la hauteur au-dessus du bord supérieur de l'orifice, l la largeur horizontale de l'orifice, on aura d'abord pour la vitesse au centre de l'ouverture

$$v=\sqrt{2g\frac{\mathrm{H}+h}{2}}; \tag{1}$$

et comme l'aire de l'orifice a pour valeur $l(\mathrm{H}-h)$, la dépense par seconde sera, en nommant m le coefficient de contraction de la veine,

$$\mathrm{Q}=ml(\mathrm{H}-h)\sqrt{g(\mathrm{H}+h)}. \tag{2}$$

Fig. 189.



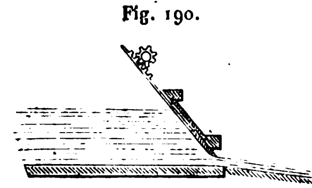
Si la vanne est verticale (*fig.* 189),

$$m=0,70.$$

Si elle est inclinée d'environ 45 degrés (*fig.* 190),

$$m=0,75.$$

Fig. 190.

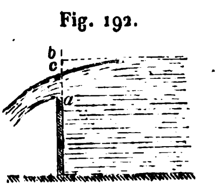


Quelquefois l'orifice d'écoulement est placé au fond du réservoir ou sur une paroi inclinée, comme on le voit sur les figures ci-après. Dans le mode représenté par la *fig.* 191, un clapet, mû par une tige T, permet de régler à volonté la grandeur de l'orifice.

Fig. 191.

DÉPENSE PAR UN DÉVERSOIR.

Fig. 192.



Un déversoir (*fig.* 192) consiste souvent en une ouverture rectangulaire ménagée à la partie supérieure d'un réservoir, et dont le côté horizontal est au-dessous du niveau du liquide. L'eau en s'écoulant par un déversoir prend la forme indiquée par la figure. Les

lignes *ac*, *bc*, ont entre elles, à peu près, les rapports su

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{ac}{ab} = 0,7247, \\ \dfrac{bc}{ab} = 0,2753. \end{array} \right.$$

Si l'on pose, pour abréger, $ab = H$, et qu'on nomme l la horizontale du déversoir, la dépense sera déterminée formule :

$$(4)\qquad Q = 0,405\, l H \sqrt{2gH}.$$

Le coefficient qui entre dans la formule précédente e MM. Poncelet et Lesbros. Il a été déterminé d'après d breuses expériences faites à Metz.

CALCUL DE LA FORCE D'UNE CHUTE.

Je suppose, pour fixer les idées, que l'eau sorte par une et considérons le mouvement d'une tranche depuis le jusqu'à l'orifice. Le régime étant établi, on peut suppos le centre de gravité de la tranche viendra passer par le de l'ouverture; p étant son poids, et h la hauteur vertica courue par le centre de gravité, son travail sera ph. Sup maintenant qu'il sorte n tranches par seconde; le trava effectué pendant ce temps sera nph. Donc si l'on pose

$$np = P,$$

on aura

$$(5)\qquad T_m = Ph.$$

Si par exemple

$$h = 1^m,50, \quad P = 3000^{kil},$$

la formule (5) donne

$$T_m = 4500^{km} = 60 \text{ chevaux};$$

pour la valeur du travail moteur que l'eau possède au s



la vanne. La valeur précédente de T_m n'exprime pas la force totale de la chute; il faut y joindre le travail Ph' développé pendant que l'eau agit sur les aubes de la roue hydraulique.

Par conséquent, si l'on nomme H la hauteur verticale comprise entre le niveau de l'eau dans le bief supérieur et le point où l'eau abandonne la roue, la valeur totale du travail moteur sera

$$T_m = PH. \tag{6}$$

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

ÉCOULEMENT DES GAZ ET DE LA VAPEUR D'EAU.

DU MOUVEMENT DES GAZ DANS LES TUYAUX DE CONDUITE.

*108. La théorie du mouvement des gaz dans les tuyaux de conduite, quand le régime est établi, est analogue à celle relative aux liquides.

Considérons d'abord un volume v de gaz dont tous les points de la surface sont soumis à la pression normale p. Si la couche extérieure prend une position infiniment voisine, en sorte que le chemin normal à la couche parcouru par l'élément superficiel ω soit ε, le travail dû à la pression $p\omega$ sera $p\omega\varepsilon$; par suite la somme des travaux dus à toutes les pressions aura pour valeur

$$p\Sigma\omega\varepsilon = pdv,$$

en désignant par dv la variation infiniment petite du volume de gaz proposé. Par conséquent, si le gaz passe du volume V au volume V′, répondant respectivement aux pressions P, P′, la somme des travaux développés sera

$$\int_{V}^{V'} pdv.$$

Mais si la température reste la même, on aura, en vertu de la loi de Mariotte,

$$pv = P'V', \quad \text{d'où} \quad p = \frac{P'V'}{v},$$

par conséquent

$$\int_{V}^{V'} pdv = P'V' \int_{V}^{V'} \frac{dv}{v} = P'V' \log \frac{V'}{V};$$

on a encore

$$PV = P'V';$$

donc enfin

$$(1) \qquad \int_V^{V'} p\,dv = P'V' \log \frac{P'}{P}.$$

Considérons maintenant un gaz sortant d'un réservoir où il est sous la pression de P, et s'écoulant, par un orifice donné, dans un milieu où la pression est P', après avoir parcouru un tuyau d'une longueur quelconque λ. Nommant T_m la somme des travaux moteurs, et T_r la somme des travaux résistants développés pour amener au dehors une couche infiniment petite de gaz, on aura, en négligeant la vitesse dans le réservoir,

$$T_m - T_r = \frac{1}{2} u^2 \Sigma m.$$

Soient α la section de l'ouverture, plus rigoureusement la section contractée de la veine gazeuze, D le poids de 1 mètre cube de gaz sous la pression P'; on aura, en désignant par τ l'élément du temps,

$$\Sigma m = \frac{\alpha D u \tau}{g},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad T_m - T_r = \frac{1}{2} \frac{\alpha D u \tau}{g} u^2.$$

La couche de gaz passant du volume V au volume V', en se transportant du réservoir au dehors, on a, en négligeant l'action de la pesanteur,

$$T_m = P'V' \log \frac{P}{P'}.$$

Soit p' la pression qui s'exerce, à un instant quelconque, sur la couche gazeuse du dehors au dedans, et qui tend à faire obstacle à son expansion; les pressions p' se faisant équilibre, à chaque instant, autour de la couche gazeuze, la somme de leurs travaux est nulle, T_r est donc égal uniquement à la somme des travaux absorbés par les frottements dans le conduit. F étant le frottement sur la longueur infiniment petite s

que prend la couche de gaz dans le tuyau, on a, c
les liquides, et en supposant la vitesse u' sensibl
stante,

$$F = \frac{D'}{g} \varepsilon s (\alpha_1 u' + \beta_1 u'^2),$$

ou plutôt

$$F = \frac{D'}{g} \varepsilon s \beta_1 u'^2,$$

en prenant, pour tous les gaz,

$$\beta_1 = 0{,}003482 \; (*).$$

On peut remarquer que ce nombre est sensibleme
que pour l'eau.

Soit a la section du tuyau. Le poids de la couche
tant constant,

$$a D' s = \alpha D u \tau, \quad \text{d'où} \quad D' s = \frac{\alpha}{a} D u \tau.$$

Substituant cette valeur dans celle de F, on trouve

$$F = \frac{\alpha}{a} \frac{D}{g} \varepsilon u \tau \beta_1 u'^2.$$

Mais si l'on suppose que $\frac{P}{P'}$ diffère très-peu de l'uni
sité du gaz reste sensiblement constante pendant to
jet; par conséquent on a, à très-peu près,

$$a u' = \alpha u,$$

d'où

$$u' = \frac{\alpha}{a} u;$$

substituant cette valeur dans celle de F, il vient

$$F = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 \frac{D}{g} \varepsilon u \tau \beta_1 u^2.$$

Le travail de cette résistance sera, pour toute la lon

(*) Ce coefficient est indiqué par M. Delaunay dans son *Traité*
rationnelle, page 562. Seulement nous avons dû le multiplier
$g = 9{,}8088$, afin de l'approprier à la forme particulière de nos fo

tuyau,

$$T_r = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{D}{g} \varepsilon\lambda u \tau \beta_1 u^2.$$

Si l'on observe maintenant que

$$V' = \alpha u \tau,$$

l'équation (2) devient

$$P' \alpha u \tau \log \frac{P}{P'} = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 \frac{D}{g} \varepsilon\lambda u \tau \beta_1 u^2 + \frac{1}{2} \alpha u \tau \frac{D}{g} u^2.$$

Simplifiant et résolvant par rapport à u, on trouve

$$(3) \qquad u = \sqrt{2 \frac{g}{D} P' \frac{\log \frac{P}{P'}}{1 + 2\beta_1 \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{\varepsilon\lambda}{a}}},$$

laquelle est d'autant plus exacte, que $\frac{P}{P'}$ diffère moins de l'unité. En même temps, la dépense par seconde aura pour valeur

$$(4) \qquad Q = \alpha u.$$

Maintenant si l'on nomme ρ le rayon du conduit, et qu'on suppose $\alpha = a$, on a à la fois

$$\varepsilon = 2\pi\rho, \quad a = \pi\rho^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varepsilon}{a} = \frac{2}{\rho}.$$

Au moyen de cette valeur, celle de u devient

$$u = \sqrt{2 \frac{\frac{g}{D} P' \log \frac{P}{P'}}{1 + 4\beta_1 \frac{\lambda}{\rho}}}.$$

Supposons maintenant que la couche de gaz circule dans une série de conduits dont les diamètres vont toujours en diminuant à partir du réservoir. Le frottement dans le tuyau

principal sera

$$F_1 = \frac{D_1}{g} \varepsilon_1 s_1 \beta_1 u_1^2.$$

Mais le poids de la couche gazeuse restant constant

$$a_1 s_1 D_1 = \alpha D u \tau, \quad \text{d'où} \quad D_1 s_1 = \frac{\alpha}{a_1} D u \tau;$$

par suite, la valeur de F_1 devient

$$F_1 = \frac{\alpha}{a_1} \frac{D}{g} \varepsilon_1 u \tau \beta_1 u_1^2.$$

D'un autre côté, si l'on suppose que $\frac{P}{P'}$ diffère très
nité, la densité du gaz reste sensiblement constar
tout son trajet; par conséquent on a, à très-peu pı

$$a_1 u_1 = \alpha u, \quad \text{d'où} \quad u_1 = \frac{\alpha}{a_1} u;$$

substituant cette valeur dans celle de F_1, il vient

$$F_1 = \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^3 \frac{D}{g} \varepsilon_1 u \tau \beta_1 u^2.$$

Soit λ_1 le chemin total estimé suivant l'axe du tuya
couru par la couche de gaz dans le conduit proposé
dû à ce frottement sera

$$F_1 \lambda_1 = \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^3 \frac{D}{g} \varepsilon_1 \lambda_1 u \tau \beta_1 u^2.$$

Pareillement, le travail dû au frottement dans
suivant aura pour valeur

$$F_2 \lambda_2 = \left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^3 \frac{D}{g} \varepsilon_2 \lambda_2 u \tau \beta_2 u^2,$$

et ainsi de suite. Enfin le travail dû au frottement da
de sortie sera

$$F \lambda = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 \frac{D}{g} \varepsilon \lambda u \tau \beta_1 u^2.$$

Ainsi l'on a à la fois

$$T_m = \alpha u \tau P' \log \frac{P}{P'},$$

$$T_r = \alpha u \tau \beta_1 u^2 \frac{D}{g} \Sigma \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{\varepsilon\lambda}{a},$$

le signe Σ s'étendant à tous les conduits dans lesquels circule la couche de gaz. Substituant ces valeurs dans l'équation (2), puis résolvant par rapport à u, on trouve en définitive

$$(5) \qquad u = \sqrt{2 \frac{\frac{g}{D} P' \log \frac{P}{P'}}{1 + 2\beta_1 \Sigma \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{\varepsilon\lambda}{a}}};$$

laquelle sera d'autant plus exacte, que P différera moins de P'. On peut remarquer que l'influence du frottement tend à augmenter à mesure que le gaz s'approche du tuyau de sortie. On voit aussi que plus l'orifice d'écoulement sera grand, plus la vitesse sera petite; toutefois αu varie dans le même sens que α (*).

Prenons pour exemple le gaz de l'éclairage. Dans ce cas,

$$P' = 10335^{\text{kil}}, \quad D = 1^{\text{kil}},281;$$

si l'on prend en même temps

$$\lambda = 1000^{\text{m}}, \quad \rho = 0^{\text{m}},02,$$

et qu'on suppose de plus

$$\frac{P}{P'} = 1,012,$$

(*) Comme le rapport $\frac{P}{P'}$ est supposé très-peu différent de l'unité, si l'on développe le logarithme et qu'on limite l'approximation au premier terme du développement, on aura

$$\log \frac{P}{P'} = \frac{P - P'}{P'}.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation générale (5) devient simplement

$$u = \sqrt{2 \frac{q}{D} \frac{P - P'}{1 + 2\beta_1 \Sigma \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{\varepsilon\lambda}{a}}}.$$

ce qui répond, dans le gazomètre, à une pression d'environ 12 centimètres d'eau, on trouve par la fi et en supposant $\alpha = a$,

$$u = 7^{m},1213.$$

La formule (4) donne, en même temps,

$$Q = 8^{lit},9448.$$

MOUVEMENT DE LA VAPEUR D'EAU DANS LES CO DES MACHINES.

* S'il s'agit de la vapeur d'eau au maximum de (aura de même, en appliquant le principe des force: portion de la couche de vapeur qui ne subit pas de tions pendant son trajet,

$$(6) \qquad T_m - T_r = \frac{1}{2} u^2 \frac{D\alpha u \tau}{g}.$$

Et ici l'on a encore, en négligeant l'action de la pes

$$T_m = \int_V^{V'} p dv.$$

Soit S le volume d'eau à 100 degrés capable de prod lume v de vapeur sous la pression p, on aura (pages 2

$$v = \frac{S}{n + qp}.$$

Désignons encore par P′ la pression d'admission d lindre; laquelle pour chaque détente ne se règle (charge; on aura également

$$V' = \frac{S}{n + qP'}.$$

On tire de ces deux équations

$$p = \frac{V'}{v}\left(\frac{n}{q} + P'\right) - \frac{n}{q}.$$

Multipliant les deux membres par dv, puis intégr V, volume de la couche de vapeur dans la chaudièr

est sous la pression P, jusqu'à V′, volume de sortie, et observant que l'on a

$$V' = \alpha u \tau, \quad \frac{V'}{V} = \frac{n + qP}{n + qP'},$$

il vient, pour la valeur de T_m,

$$(7) \qquad T_m = \alpha u \tau \left(\frac{n}{q} + P'\right) \log \frac{n + qP}{n + qP'} - \frac{n(P - P')}{n + qP} \alpha u \tau.$$

Soit F le frottement de la couche de vapeur dans le conduit; en prenant pour la vapeur d'eau le même coefficient que pour les gaz,

$$F = \frac{D'}{g} \varepsilon s \beta_1 u'^2.$$

Nous supposons que le rapport $\frac{P}{P'}$ est peu différent de l'unité, ce qui rendra la vitesse sensiblement la même dans toute l'étendue du tuyau, pourvu que la section reste constante. Mais le poids de la couche de vapeur ne changeant pas,

$$a D' s = \alpha u D \tau, \quad \text{d'où} \quad D' s = \frac{\alpha}{a} D u \tau;$$

donc, au moyen de cette valeur, celle de F devient

$$F = \frac{D}{g} \frac{\varepsilon}{a} \beta_1 u'^2 \alpha u \tau.$$

D'un autre côté, la densité de la vapeur reste sensiblement constante pendant tout son trajet, puisqu'on suppose que P diffère très-peu de P′; par conséquent on a

$$a u' = \alpha u,$$

d'où

$$u' = \frac{\alpha}{a} u;$$

substituant cette valeur dans celle de F, il vient

$$F = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{D}{g} \frac{\varepsilon}{a} \beta_1 u^2 \alpha u \tau.$$

On a ensuite, pour le travail de la force F,

$$T_r = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{D}{g} \frac{\varepsilon \lambda}{a} \beta_1 u^2 a u \tau.$$

Substituant les valeurs précédentes de T_m et de T_r d
tion (6), puis résolvant par rapport à u, on trouve

$$(8)\quad u = \sqrt{2\frac{g}{D}\,\frac{\left(\frac{n}{q}+P'\right)\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P}{n+qP}}{1+2\beta_1\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2\frac{\varepsilon\lambda}{a}}}$$

Mais D étant le poids de 1 mètre cube de vapeur sou
sion P', on a, à très-peu près, en kilogrammes

$$D = 1000\,(n+qP');$$

par suite, la valeur de u devient, en nommant tou
rayon du conduit,

$$(9)\quad u = \sqrt{\frac{2g}{1000}\,\frac{\frac{1}{q}\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P')}{(n+qP)(n+q}}{1+4\beta_1\frac{\alpha^2\lambda}{\pi^2\rho^5}}}$$

laquelle devient, en supposant $\alpha = \pi\rho^2$,

$$(10)\quad u = \sqrt{\frac{2g}{1000}\,\frac{\frac{1}{q}\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P')}{(n+qP)(n+q}}{1+4\beta_4\frac{\lambda}{\rho}}}$$

La formule (9) fait voir que la vitesse d'écoulement s

(*) Il serait aisé d'avoir égard au frottement dans la partie du
fait communiquer la boîte à vapeur avec le cylindre moteur. Il suf
cela, de ne compter λ que jusqu'à la boîte à vapeur et d'ajouter a
nateur le terme $2\beta_1\frac{\varepsilon'\lambda'}{\alpha}$, ε' étant le périmètre de ce dernier con
longueur; mais cela nous a paru peu important.

Si, quelque part, le long du conduit, on oblige la vapeur à pas
orifice variable α', la vitesse u sera changée. Nommant φ l'angle de
de la vapeur en assimilant l'effet produit à celui qui serait dû ou
étranglement conique, en vertu du théorème de Carnot (page 265)
égard à l'influence du rétrécissement, en augmentant le dénomina
valeur (9) de u, de la quantité

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 \operatorname{tang}^2\varphi.$$

tant plus petite, que la section α de l'ouverture sera plus grande; toutefois αu varie dans le même sens que α.

Supposons maintenant que la vapeur émane de plusieurs générateurs, où elle est sous la même pression P, et nommons

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots$$

les chemins qu'elle parcourt, à partir de chaque générateur, dans un même tuyau, jusqu'à l'endroit où un deuxième conduit, qui peut être le prolongement du premier, reçoit la vapeur de tous les générateurs pour l'amener au cylindre. Supposons aussi que les chaudières fournissent respectivement

$$\frac{1}{n_1}, \quad \frac{1}{n_2}, \quad \frac{1}{n_3}, \ldots,$$

de la quantité totale de la vapeur qui alimente la machine; on aura d'abord

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots=1.$$

Cela posé, la couche de vapeur qui sort de la première chaudière subira un frottement ayant pour valeur

$$F_1=\frac{D_1}{g}\varepsilon_1 s_1 \beta_1 u_1^2.$$

Mais la pression P étant supposée peu différente de P′, on a sensiblement

$$u_1=\frac{\alpha}{a_1}u, \quad D_1 s_1=\frac{D}{n_1}\frac{\alpha}{a_1}u\tau,$$

par suite,

$$F_1=\frac{1}{n_1}\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\frac{D}{g}\frac{\varepsilon_1}{a_1}\beta_1 u^2\alpha u\tau.$$

Le travail dû à ces frottements est exprimé par

$$F_1\lambda_1=\frac{1}{n_1}\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\frac{D}{g}\frac{\varepsilon_1\lambda_1}{a_1}\beta_1 u^2\alpha u\tau.$$

On a de même, relativement à la couche de vapeur issue de la deuxième chaudière,

$$F_2\lambda_2=\frac{1}{n_2}\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\frac{D}{g}\frac{\varepsilon_1\lambda_2}{a_1}\beta_1 u^2\alpha u\tau.$$

Pour la troisième chaudière on a pareillement

$$F_3\lambda_3 = \frac{1}{n_3}\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2 \frac{D}{g}\,\frac{\varepsilon_1\lambda_3}{a_1}\,\beta_1 u^2 \alpha u \tau,$$

et ainsi de suite. Enfin, le travail dû aux frottemen
conduit λ compté du point où il reçoit la vapeur d
générateurs, sera

$$F\lambda = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{D}{g}\,\frac{\varepsilon\lambda}{a}\,\beta_1 u^2 \alpha u \tau.$$

Le travail total résistant aura donc pour expression

$$T_r = \frac{1}{n_1}\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2 \frac{D}{g}\,\frac{\varepsilon_1\lambda_1}{a_1}\,\beta_1 u^2 \alpha u \tau + \frac{1}{n_2}\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2 \frac{D}{g}\,\frac{\varepsilon_1\lambda_2}{a_1}\,\beta_1 u^2 \alpha u$$
$$+ \frac{1}{n_3}\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2 \frac{D}{g}\,\frac{\varepsilon_1\lambda_3}{a_1}\,\beta_1 u^2 \alpha u \tau + \ldots + \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{D}{g}\,\frac{\varepsilon\lambda}{a}\,\beta_1 u$$

Substituant dans l'équation (6) la valeur (7) de T_m,
leur ci-dessus de T_r, puis résolvant par rapport à u, o
en observant que $D = 1000\,(n + qP')$,

$$(11)\quad u = \sqrt{\frac{2g}{1000}\,\frac{\frac{1}{q}\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P')}{(n+qP)(n+qP'}}{1+2\beta_1\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2\frac{\varepsilon\lambda}{a} + \frac{2}{n_1}\beta_1\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\frac{\varepsilon_1\lambda_1}{a_1} + \frac{2}{n_2}\beta_1\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\frac{\varepsilon_1\lambda_2}{a_1} + \frac{2}{n}}}$$

Supposant $\alpha = a_1 = a$, il vient, en nommant touj
rayon du conduit,

$$(12)\quad u = \sqrt{\frac{2g}{1000}\,\frac{\frac{1}{q}\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P')}{(n+qP)(n+}}{1+4\frac{\beta_1}{\rho}\left(\lambda + \frac{\lambda_1}{n_1} + \frac{\lambda_2}{n_2} + \frac{\lambda_3}{n_3} + .\right.}}$$

De plus si

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots,$$

cette formule se simplifiera, et prendra la forme

$$(13)\quad u = \sqrt{\frac{2g}{1000}\,\frac{\frac{1}{q}\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P')}{(n+qP)(n+q}}{1+4\frac{\beta_1}{\rho}\,\frac{n_1\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots}{n_1}}}$$

Il est bon de remarquer que le terme

$$\frac{n_1\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots}{n_1}$$

est égal à la moyenne des longueurs du conduit, comptées de chaque générateur jusqu'au cylindre. De là il suit que la formule (13) est renfermée dans la formule (10), pourvu que dans celle-ci on fasse λ égal à la moyenne ci-dessus. La formule générale (11) se transforme aussi dans la formule (9), lorsqu'on suppose

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots \quad \text{et} \quad a_1 = a.$$

RAPPORT DE LA VITESSE MOYENNE DU PISTON MOTEUR A LA VITESSE D'ÉCOULEMENT DE LA VAPEUR.

Soit t la durée de l'admission exprimée en secondes; le volume de vapeur admise dans le système distributeur sous la pression P' sera

$$\alpha u t;$$

et l'on aura, à très-peu près, en désignant dorénavant par a la section du cylindre,

$$\alpha u t = al' + ac + \beta + \theta.$$

(*Voir* pour la notation la page 217). Nommant N le nombre des courses du piston en une minute, on a, approximativement,

$$t = \frac{60}{N}\frac{l'}{l} \ (*);$$

substituant cette valeur de t dans l'équation précédente, elle devient

(14) $$\alpha u = \frac{N}{60}(al' + ac + \beta + \theta)\frac{l}{l'},$$

de laquelle on tire

(15) $$\frac{\alpha}{a} = \frac{Nl}{60u}\,\frac{al' + ac + \beta + \theta}{al'}.$$

(*) Cette valeur de t est généralement un peu trop grande. Mais comme $al' + ac + \beta + \theta$ surpasse aussi un peu le volume d'admission de la vapeur (page 218, formule 1), les deux erreurs tendent à se compenser.

Cette relation fait voir que *le rapport de la sectio rifice d'écoulement à celle du cylindre, est propor à la vitesse moyenne N l du piston moteur; il est inv proportionnel à la vitesse d'arrivée de la vapeur; varie en sens inverse de la course d'admission l'.*

L'équation (15) peut s'écrire

$$(16)\qquad \frac{\mathrm{N}l}{60u} = \frac{\alpha}{a}\,\frac{al'}{al' + ac + \beta + \theta}.$$

Cette formule fera connaître, dans une machine ét rapport de la vitesse moyenne du piston moteur, à la d'écoulement de la vapeur; et l'on peut remarquer rapport est indépendant des pressions P et P'. La q $\frac{\mathrm{N}l}{60u}$ prend sa valeur maxima pour $l' = l$, c'est-à-dire la machine travaille sans détente ou à pleine vapeur cylindre moteur. On a, dans ce cas,

$$(17)\qquad \frac{\mathrm{N}l}{60u} = \frac{\alpha}{a}\,\frac{al}{al + ac + \beta + \theta},$$

et à très-peu près,

$$(18)\qquad \frac{\mathrm{N}l}{60u} = \frac{\alpha}{a}.$$

Si l'on prend pour limite inférieure de l'

$$l' = c + \frac{\beta + \theta}{a},$$

l'équation (16) donne

$$(19)\qquad \frac{\mathrm{N}l}{60u} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a},$$

qu'on peut prendre pour limite inférieure du rapport de vitesses. La formule (18) donnera aussi la vitesse m maxima que pourra prendre le piston moteur d'une m travaillant sous des pressions données, mais peu diff dans la chaudière et dans le cylindre. En prenant la mo résultat, on aura la vitesse moyenne répondant à la

d'admission très-petite

$$l' = c + \frac{\theta}{a}.$$

Mais la formule (16) donnera, dans tous les cas, la vitesse moyenne que prendra le piston moteur d'une machine, pour des pressions peu différentes dans la chaudière et dans le cylindre.

RAPPORT DE LA VITESSE D'UNE LOCOMOTIVE A CELLE DE LA VAPEUR.

S'il s'agit d'une locomotive $\beta = 0$, attendu que le tiroir faisant détente, la boîte à vapeur peut être considérée comme faisant partie de la chaudière. Si les roues motrices ont pour rayon R, et si la machine est animée (par minute) de la vitesse V, on aura

$$N = \frac{V}{\pi R},$$

et la formule (16) donnera

$$(20) \qquad \frac{V}{60\,u} = \pi \frac{\alpha R}{al} \frac{al'}{al' + ac + \theta}.$$

Ce rapport prend sa valeur maxima pour $l' = l$, ou quand la machine marche sans détente. Dans ce cas,

$$(21) \qquad \frac{V}{60\,u} = \pi \frac{\alpha R}{al} \frac{al}{al + ac + \theta},$$

et à très-peu près

$$(22) \qquad \frac{V}{60\,u} = \pi \frac{\alpha R}{al}.$$

Cette formule donnera aussi la vitesse maxima que pourra prendre une locomotive travaillant sous des pressions données, mais peu différentes, dans la chaudière et dans le cylindre. En prenant la moitié du résultat, on aura la vitesse répondant à la course d'admission très-petite

$$l' = c + \frac{\theta}{a}.$$

Mais la formule (20) donnera, dans tous les cas, la
prendra une machine locomotive, pour des pression
férentes dans la chaudière et dans le cylindre.

Si, par exemple,

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{10}, \quad R = 1^{m}, \quad l = 0^{m},4,$$

l'équation (22) donne

$$\frac{V}{60\,u} = 0,9 \text{ environ.}$$

Si l'on veut que la vitesse de la locomotive soit
vitesse d'écoulement de la vapeur, il faudra détermi
la relation

$$(23) \qquad \frac{\alpha}{a} = \frac{1}{\pi}\,\frac{l}{R}\,\frac{al' + ac + \theta}{al'}.$$

La valeur minima de ce rapport répond à $l' = l$; ce q

$$(24) \qquad \frac{\alpha}{a} = \frac{1}{\pi}\,\frac{l}{R}\,\frac{al + ac + \theta}{al},$$

et à très-peu près,

$$(25) \qquad \frac{\alpha}{a} = \frac{1}{\pi}\,\frac{l}{R}.$$

Si par exemple

$$l = 0^{m},4, \quad R = 1^{m},$$

la formule précédente donne

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{8} \text{ environ.}$$

Si l'on prend pour limite inférieure de l'

$$l' = c + \frac{\theta}{a},$$

l'équation (23) deviendra

$$(26) \qquad \frac{\alpha}{a} = \frac{2}{\pi}\,\frac{l}{R},$$

qu'on peut prendre pour limite supérieure de $\frac{\alpha}{a}$.

CALCUL DE LA SECTION DES CONDUITS DE VAPEUR.

Reprenons l'équation (10). On en tire

$$\alpha^2 u^2 = \frac{2g}{1000}\alpha^2 \frac{\frac{1}{q}\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P')}{(n+qP)(n+qP')}}{1+4\beta_1\frac{\lambda}{\rho}}.$$

Éliminant αu entre cette équation et l'équation (14), prenant $\alpha = \pi\rho^2$ comme dans cette dernière, on trouve, pour déterminer ρ, l'équation du cinquième degré,

$$(27) \qquad \rho^5 - M(\gamma\rho + \gamma'\lambda) = 0,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$(28) \qquad \begin{cases} M = \dfrac{N^2 a^2 l^2 \left(\dfrac{al' + ac + \beta + \theta}{al'}\right)^2}{\dfrac{1}{q}\log\dfrac{n+qP}{n+qP'} - \dfrac{n(P-P')}{(n+qP)(n+qP')}}, \\ \gamma = 0{,}001435, \\ \gamma' = 0{,}00002. \end{cases}$$

Comme dans la pratique on n'a pas précisément besoin de la racine exacte de l'équation (27), mais bien d'une valeur qui lui soit supérieure, il suffira de substituer successivement à la place de ρ, à partir de

$$(29) \qquad \rho = \sqrt[4]{\frac{M\gamma}{5}},$$

des valeurs croissant, d'abord de centimètre en centimètre, puis de 5 en 5 millimètres, etc., en s'arrêtant à une valeur de ρ suffisamment approchée, et qui fasse prendre le signe $+$ au premier membre de l'équation proposée. Et l'on ne devra pas perdre de vue que les logarithmes étant népériens, devront être multipliés préalablement par le nombre

$$k = 2{,}302585.$$

Nous avons vu (page 215) qu'il existait une charge des pistons pour laquelle la pression d'admission était très-peu in-

férieure à la pression dans la chaudière; il suit
rayon du conduit doit être déterminé pour des v
peu différentes de P et de P', et aussi pour de très
leurs de l', afin que la quantité de vapeur affluant
lindre soit suffisante pour maintenir la vitesse de l
sous toutes les conditions de charge et de détente q
lui imposer.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l
coulement, ou, si l'on aime mieux, l'aire de chaq
dans la boîte à vapeur du cylindre moteur, était
section du conduit. Si l'on veut réduire les frotteme
de la relation

$$\alpha = \pi\rho^2,$$

il suffira de prendre

$$\frac{\alpha^2\lambda}{\pi^2\rho^5} = m,$$

m étant un nombre choisi convenablement, mai
arbitraire. De là on tire

$$(30) \qquad \rho = \sqrt[5]{\frac{\alpha^2\lambda}{\pi^2 m}},$$

ce qui donne, pour la vitesse de la vapeur,

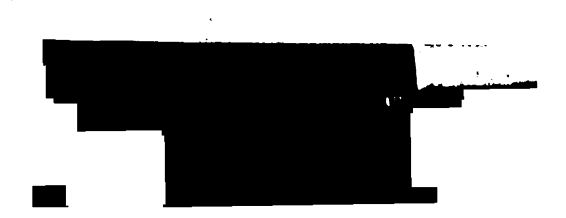
$$(31) \qquad u = \sqrt{\frac{2g}{1000}\,\frac{\frac{1}{q}\log\frac{n+qP}{n+qP'} - \frac{n(P-P')}{(n+qP)(n+\ldots}}{1+4m\beta_1}}$$

laquelle diffère peu de celle qu'on obtiendrait en fais
Cela posé, si l'on substitue cette valeur de u da
tion (14), et qu'on résolve ensuite par rapport à α,
après tous calculs faits,

$$(32) \qquad \alpha = (0,119)\sqrt{(1+4m\beta_1)M}.$$

Enfin, si l'on se donne arbitrairement α, on aur
terminer ρ la formule

$$(33) \qquad \rho = \sqrt[5]{\frac{\frac{4}{\pi^2}\beta_1 M\lambda}{70,62336 - \frac{M}{\alpha^2}}}.$$



On déduira sans peine de cette équation la valeur de α si c'est ρ qui est donné.

Prenons pour exemple la machine de Wolf de la page 237, laquelle ne détend pas dans le petit cylindre, et vérifions si les conduits, dont le rayon égale $0^{m},028$, sont assez larges pour maintenir la vitesse normale de cinquante-deux courses par minute, avec un dixième d'atmosphère de différence dans la chaudière et dans le cylindre. Nous avons dans ce cas

$$l' = l = 1^{m},06,$$
$$r = 0^{m},17, \quad \text{d'où} \quad a = 0^{mq},0908,$$
$$c = 0^{m},08,$$
$$\lambda = 8^{m},75.$$

Prenant en même temps

$$P = 3^{atm},6 = 37205^{kil},$$
$$P' = 3^{atm},5 = 36172^{kil},$$
$$n = 0,0001421,$$
$$q = 0,0000000471,$$

on trouve d'abord, en négligeant θ, et observant qu'ici $\beta = 0$,

$$M = 0,0000567616.$$

Ensuite l'équation (27) devient, en forçant un peu les coefficients des deux derniers termes,

$$\rho^{3} - (0,000000082)\rho - 0,00000001 = 0;$$

et l'on reconnaît, après quelques tâtonnements, que la racine positive de cette équation est comprise entre

$$0^{m},025 \quad \text{et} \quad 0^{m},0265.$$

Donc, si l'on prend

$$\rho = 0^{m},0265,$$

on aura le rayon du conduit par excès, et à $1^{mm},5$ près.

On peut remarquer que le rayon effectif ne surpasse le précédent que de $1^{mm},5$.

Si l'on prend pour rayon du conduit le rayon effectif

$$\rho = 0^{m},028,$$

l'équation (10) donne pour la vitesse d'arrivée d
dans le cylindre :

Quand on n'a pas égard au frottement

$$u = 100^{m},$$

Quand on a égard au frottement

$$u = 43^{m},25 \ (38,7 \text{ lieues à l'heure}).$$

On voit, par cet exemple, que l'influence du fr
saurait être negligée dans l'établissement des cond
peur.

Si l'on applique les formules (32) et (30) à la m
précède, on trouve, pour l'aire de chaque lumiè
première boîte à vapeur, en faisant $m = 25$,

$$\alpha = 0^{mq},00104.$$

et pour le rayon du conduit

$$\rho = 0^{m},033,$$

Remarquons que le rapport de la vitesse moyen
piston moteur à la vitesse qui vient d'être calculée
$\frac{1}{47}$. Or, pour cette vitesse de $43^{m},25$, la quantité de
afflue dans le cylindre est trop grande pour mainteni
de la machine à 52 courses par minute; par conséqu
gulateur devra rétrécir le conduit de manière à pr
effet équivalent à celui qui consisterait à diminuer
de la vapeur, de manière à satisfaire à l'équation (16
donne, dans ce cas,

$$\frac{Nl}{60\,u} = \frac{1}{42}.$$

Par conséquent, dans la machine qui précède, le ré
pour effet d'élever $\frac{Nl}{60\,u}$ de $\frac{1}{47}$ à $\frac{1}{42}$.

Si l'on prend pour rayon du conduit

$$\rho = 0^{m},0265,$$

le rapport de sa section à celle du cylindre a pour va

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{42}.$$

Les constructeurs adoptent souvent, et à peu près,

$$\text{Dans les machines fixes} \ldots \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{1}{25},$$

$$\text{Dans les locomotives} \ldots\ldots \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{1}{10}.$$

Prenons, pour deuxième exemple, la locomotive de la page 221. Nous avons, dans ce cas,

$$\begin{aligned} l &= 0^{m},40, \\ c &= 0^{m},04, \\ a &= 0^{mq},04, \\ \lambda &= 4^{m},50. \end{aligned}$$

Adoptant en même temps

$$\begin{aligned} P &= 6^{atm},1 = 63043^{kil}, \\ P' &= 6^{atm} = 62010^{kil}, \\ l' &= \frac{1}{5} l = 0^{m},08, \\ N &= 212 \text{ (environ 10 lieues à l'heure)}, \end{aligned}$$

on trouve d'abord

$$M = 0,000081097.$$

Ensuite l'équation (27) devient

$$\rho^5 - (0,00000012)\rho - 0,0000000073 = 0.$$

Nous prendrons pour racine

$$\rho = 0^{m},02562,$$

laquelle est approchée, par excès, à moins de $0^{m},00062$. A l'aide de cette valeur, on obtient sans peine

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{19} \text{ environ.}$$

Le rapport de la vitesse moyenne du piston, à la vitesse d'écoulement de la vapeur dans le cylindre, a pour valeur

$$\frac{Nl}{60u} = \frac{1}{28,5}, \quad \text{d'où} \quad u = 40^{m},28 \text{ (36,25 lieues à l'heure).}$$

Le rapport de la vitesse de la machine à la vitesse de la vapeur est

$$\frac{V}{60u} = \frac{1}{3,6} \text{ environ.}$$

Si la locomotive ci-dessus, sous les mêmes conditions de pression et de détente, marchait à la vitesse de 15 lieues à l'heure, ce qui répond à 318 courses du piston par minute, le rayon du conduit serait donné par l'équation

$$\rho^5 - (0,000000262)\rho - 0,000000017 = 0;$$

laquelle étant résolue donne

$$\rho = 0^m,03.$$

Ce résultat est approché, par défaut, à moins de $0^m,0005$ près.

Comparant la section du conduit, dont le rayon a la valeur ci-dessus, avec la section du cylindre, on trouve

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{14} \text{ environ.}$$

Quant à la vitesse d'écoulement de la vapeur, elle a pour valeur, relativement au même rayon de $0^m,03$,

$$u = 44^m,52 \text{ (40,068 lieues à l'heure).}$$

On trouve aussi sans peine

$$\frac{V}{60u} = \frac{1}{2,7} \text{ environ.}$$

Si par la formule (22) et pour les pressions de $6^{atm},1$ et 6^{atm}, on calcule la vitesse maxima de la locomotive qui précède, on trouve, en prenant $\rho = 0^m,03$, $\alpha = \pi\rho^2 = 0^{mq},002827$,

$$V = 1499^m, \text{ ou } (22^{lieues},5 \text{ à l'heure}).$$

En appliquant la même formule à trois machines de la ligne du Nord, nous avons été conduit aux résultats suivants :

	Nos DES MACHINES.	LONGUEUR approchée du conduit.	RAYON du conduit.	VITESSE MAXIMA par heure.
		m	m	lieues
Machine Crampton.....	140	1	0,05	39
Machine à voyageurs...	83	5,5	0,05	18,7
Machine à marchandises..	315	2,	0,05	13,8

et

$$F_1 = \frac{2}{\pi}\frac{a_1 l_1}{R_1}\left(\frac{n}{q}+P'\right)\left[\frac{a_1 l'_1}{a_1 l_1} + \left(\frac{a_1 l_1}{a_1 l_1} + \frac{a_1 c_1 + \theta_1}{a_1 l_1}\right)\log\frac{a_1 l}{a_1 l'}\right.$$
$$- \frac{2}{\pi}\frac{a_1 l_1}{R_1}\left(\frac{n}{q} + \varpi\right);$$

de là on tire, à l'aide des relations ci-dessus,

(36) $$\frac{F_1}{F} = \frac{\alpha_1}{\alpha}.$$

Pareillement, on aura, entre les vaporisations de
chines en un même temps,

(37) $$\frac{S_1}{S} = \frac{a_1}{a}.$$

Proposons-nous, par exemple, de calculer les des organes moteurs d'une machine devant ma même vitesse que la machine Crampton n° 140 du Nord, mais avec une charge plus grande d'un

DIMENSIONS DES ORGANES MOTEURS DE LA MACHINE CRAM

Course du piston	$l = 0$'
Rayon du cylindre	$r = 0$'
Rayon des roues motrices	$R = 1$'
Liberté du cylindre	$c = 0$'
Longueur du conduit de vapeur	$\lambda = 1$
Rayon du conduit de vapeur	$\rho = 0$
Aire de la lumière dans la boîte à vapeur	$\alpha = 1$'

En vertu de l'équation (36), nous avons d'abord

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{4}{3}, \quad \text{d'où} \quad \alpha_1 = 0^{mq},02.$$

Prenant

$$\lambda_1 = \lambda = 1^m,$$

la première des équations (35) donne

$$\rho_1 = 0^m,056.$$



Adoptant pour rayon des roues motrices,

$$R_1 = 0^{m},90,$$

on obtient, par la deuxième des équations (35),

$$a_1 l_1 = 0^{mc},10834.$$

Si l'on prend, par exemple,

$$l_1 = 0^{m},55,$$

la section a_1 prend la valeur

$$a_1 = 0^{mc},197,$$

d'où l'on tire

$$r_1 = 0^{m},25.$$

En vertu de la troisième des équations citées,

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'}{l}.$$

Enfin on satisfera à la dernière des équations (35) en posant

$$\frac{c_1}{l_1} = \frac{c}{l} = \frac{1}{32}, \quad \frac{\theta_1}{a_1 l_1} = \frac{\theta}{al}.$$

Mais $\theta_1 = \alpha_1 \lambda'_1$, $\theta = \alpha\lambda'$ en nommant λ_1, et λ' les longueurs des axes des conduits aboutissants, par suite

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'} = 1,222.$$

Le problème est donc entièrement résolu.

Ainsi se trouve rendue à peu près complète la théorie mathématique de la machine à vapeur (*).

(*) La théorie qui précède, relative au mouvement de la vapeur, est extraite d'un Mémoire que nous avons présenté à l'Académie des Sciences le 12 avril 1858.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

ROUES HYDRAULIQUES DONT L'AXE EST HORIZ

109. Les roues hydrauliques sont destinées à utili
motrice de l'eau. Elles se composent en général d'ı
ou tambour de peu de longueur par rapport au di
tambour est terminé par deux bases circulaires ap
ronnes. A la surface du cylindre sont adaptées des *a*
ou courbes, destinées à recevoir l'action de l'eau.
sont remplacées, dans certains cas, par des *vases* ou
s'emplissent de liquide, dont le poids fait tourner
que celle-ci doit élever à une certaine hauteur. L'ax
hydrauliques est généralement horizontal. Il est ve
certaines roues à grande vitesse, comme les turbine

ROUES A PALETTES PLANES.

Ces roues sont à palettes planes ou courbes. E
vent l'eau sur leurs aubes les plus basses. Quand la
palettes planes (*fig.* 193), la vanne, ordinairemen

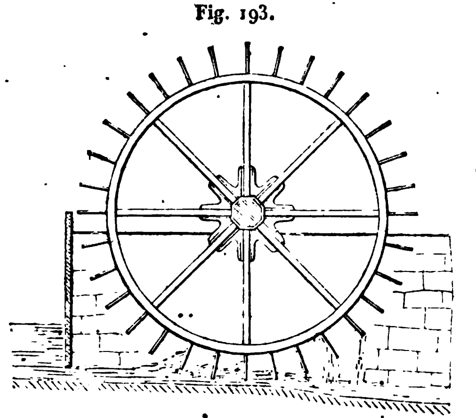


Fig. 193.

est placé
taine di
aubes, e
est pre
jours ég
du cours
lettes on
ment d
$0^m,40$ d
dans le
rayon;
ment,

la circonférence extérieure, est à peu près égal à leur longueur; leur largeur, mesurée dans le sens de l'axe, ne diffère de la largeur du coursier que de quelques centimètres. Quelquefois les aubes sont inclinées, vers l'amont, sur le prolongement du rayon, d'un angle d'environ 25 degrés.

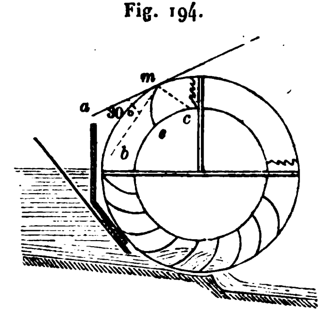
Un coursier ordinairement rectiligne emboîte inférieurement les aubes, et ne laisse à la roue sur les joues et le fond du coursier qu'un jeu de 1 à 2 centimètres. La pente du coursier varie de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{8}$.

L'épaisseur de la lame d'eau qui s'établirait dans le coursier, si la roue n'y était pas, doit égaler environ le $\frac{1}{3}$ ou le $\frac{1}{4}$ de la longueur des aubes estimée dans le sens du rayon.

ROUE PONCELET.

Les roues à aubes courbes (*fig.* 194) ont été imaginées par M. Poncelet. Elles reçoivent l'eau par une vanne inclinée; la roue tourne dans un coursier qui ne laisse que 1 centimètre de jeu pour les roues en fonte, et 2 pour celles en bois, plus sujettes à se déformer; elles portent des parois latérales destinées à retenir l'eau.

Fig. 194.



Le coursier se termine par un ressaut brusque, afin de faciliter le dégorgement des aubes, car l'eau en sort avec une vitesse à peu près nulle. Les aubes sont assemblées entre deux couronnes annulaires dont la distance, dans le sens du rayon, doit être au moins égale au $\frac{1}{4}$ de la hauteur de la chute, ainsi qu'on le verra plus loin. Les aubes sont circulaires et leur inclinaison sur la circonférence extérieure est ordinairement de 30 degrés environ. Voici comment on en fait le tracé. Par un

point m, on mène une tangente ma, puis au point un angle $amb = 30$ degrés; on élève mc perpendic sur mb, et l'on prend le point c, pour centre de l'a

Les aubes sont ordinairement en tôle de fer de 4 mètres d'épaisseur; le nombre en est ordinairement les roues de 3 à 4 mètres de diamètre, et de 48 pou de 6 à 7 mètres de diamètre.

ROUES DE COTÉ.

Les roues de côté (*fig.* 195 et 196) sont des roues planes qui reçoivent hauteur de l'axe, soi vanne, soit par un Elles sont emboîtées coursier dont le jeu, ta côtés que sur la circo doit être de 1 à 2 ce au plus. D'après cett tion, on voit que le liquide doit prendre sensiblement

Fig. 195.

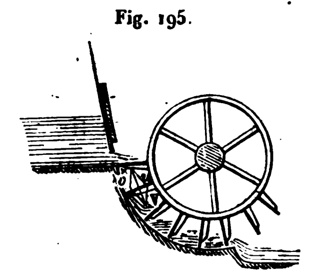
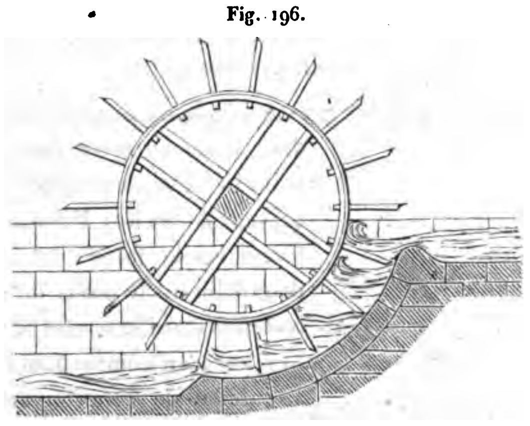


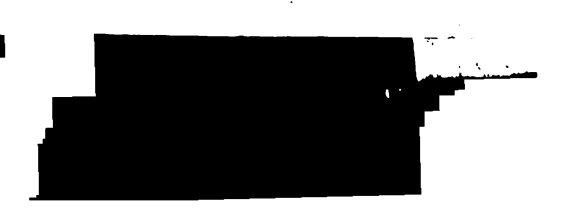
Fig. 196.



de la roue, vitesse qui peut aller jusqu'à 2 mètres pa

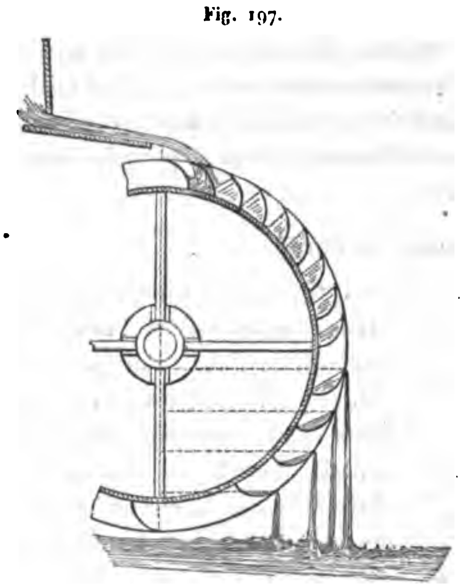
ROUES EN DESSUS.

Ces roues (*fig.* 197) reçoivent l'eau à leur partie su soit dans des augets, soit sur des aubes renfermées



coursier; dans l'un et l'autre cas, le liquide agit par son poids.

Fig. 197.

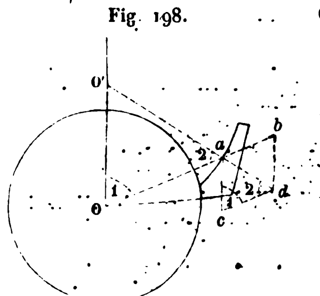


L'usage des augets paraît convenir, lorsque la hauteur de chute étant très-grande, la quantité d'eau est peu considérable; l'usage des aubes est préférable dans le cas contraire. La roue à augets doit tourner assez lentement pour que la force centrifuge ne fasse pas sortir trop tôt l'eau des augets; on conçoit que la vitesse doit être telle, que le liquide reste dans la roue le plus longtemps possible.

LA ROTATION DE LA ROUE FAIT PRENDRE A L'EAU DE L'AUGET LA FORME CYLINDRIQUE.

110. Soit a (*fig.* 198) une molécule d'eau prise à la surface dans l'auget; cette molécule est sollicitée par deux forces dirigées suivant ab et ac; l'une ab de ces forces est la force centrifuge, la deuxième est le poids de la molécule; m étant la masse de celle-ci, l'on aura, en nommant ω la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe O,

Fig. 198.



$$ab = m\,\omega^2 . \mathrm{O}a, \quad ac = mg;$$

d'où l'on tire

$$\frac{ab}{ac} = \frac{\omega^2}{g} \cdot \mathrm{O}a.$$

Ayant construit le parallélogramme $abcd$, la ré de ces deux forces viendra rencontrer en O' la ve menée par le centre O de la roue. Mais les triangles étant semblables, donnent la relation

$$\frac{ab}{ac} = \frac{Oa}{OO'};$$

comparant les deux valeurs du rapport $\frac{ab}{ac}$, il vient

$$(1) \qquad OO' = \frac{g}{\omega^2}.$$

Or, pour l'équilibre de l'eau dans l'auget, il faut les forces telles que ad soient normales à la surface ces normales viennent toutes passer par un même donc cette surface est un cylindre dont l'axe, parall de la roue, passe par le point O' déterminé comme

LIMITE DU NOMBRE DE TOURS DE LA ROUE A AU

Posons, pour abréger, $OO' = h$; l'équation précéd nera, en la résolvant par rapport à ω,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Mais $\omega = \frac{\pi N}{30}$, en désignant par N le nombre de tou nute; par suite,

$$N = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Or plus h sera grand, plus l'eau s'approchera dans l'horizontalité; par conséquent, si l'on pose

$$h > mR,$$

m étant un nombre choisi convenablement, mais arbitraire, et qu'on remplace ensuite h par mR, on

$$N < \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{mR}},$$

qu'on peut prendre pour la limite cherchée.

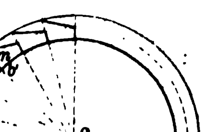
Si par exemple on prend $R = 3^m$, $m = 10$, il vient

$$N < 3,1.$$

TRACÉ DES AUGETS D'UNE ROUE.

Ayant choisi arbitrairement le rayon de la circonférence extérieure de la jante de la roue, on partage cette circonférence entre un nombre entier n de parties égales telles, qu'elles soient comprises entre $0^m,30$ et $0^m,40$; on a ainsi la distance de deux augets. Soit ab (*fig.* 199) l'une de ces divisions; on choisit ensuite l'épaisseur de la jante, de telle sorte qu'on ait

Fig. 199.



$$a'b' = \frac{6}{5} aa';$$

on joint le point a avec le milieu m de bb', et l'on prend la ligne brisée amb' pour le demi-profil de l'auget.

Quelquefois on arrondit légèrement les angles, ainsi qu'on le voit en $rsqt$. Cette dernière disposition est adoptée dans les grandes roues en fer, afin de ne pas s'exposer à rompre, en les ployant, les feuilles de tôle qui servent à la construction des augets.

CALCUL DU RAYON DE LA CIRCONFÉRENCE INTÉRIEURE DE LA JANTE.

Posons, pour abréger,

$$Oa = R, \quad Oa' = r;$$

nous connaissons R ainsi que le nombre n des augets, et nous nous proposons de déterminer r. Pour cela, nous avons

$$n.a'b' = 2\pi r, \quad a'b' = \frac{6}{5}(R - r);$$

de là on tire

$$(2) \qquad r = \frac{3nR}{3n + 5\pi}.$$

Si, par exemple, on suppose $R = 4^m$; comme l'intervalle entre

deux augets doit être compris entre $0^m,30$ et $0^m,40$

$$\frac{2\pi R}{n} > 0^m,30, \quad \frac{2\pi R}{n} < 0^m,40,$$

et, par suite,

$$n > 62,8, \quad n < 83,7.$$

Prenant $n = 70$, la formule (2) donne

$$r = 3^m,721.$$

CAPACITÉ DES AUGETS.

Concevons un auget dans la position où il reç
la source; si par le bord le moins élevé on mène un
zontal, ce plan marquera la limite de l'eau dans l'
traction faite de l'influence de la force centrifuge. I
le volume de l'auget par l'aire de son profil ainsi
aura la largeur de l'auget dans le sens de l'axe. So
lume, et *proposons-nous de déterminer la largeur*
sous la condition que sa capacité soit dans un rapp
avec la quantité d'eau qu'il doit recevoir. Pour cela,
n le nombre des augets, et N le nombre de tours que l
faire en une minute. La durée d'un tour de roue s
condes; et comme dans cet intervalle il passe n aug
l'orifice d'écoulement, le passage d'un seul durera $\frac{60}{Nn}$
Soit Q la dépense de l'orifice par seconde; la qua
liquide qui entrera dans l'auget, sera

$$q = \frac{60}{Nn} Q. \tag{3}$$

Mais, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$\frac{v}{q} = \iota;$$

remplaçant q par sa valeur (3), il vient

$$v = \frac{60}{Nn} Q\iota. \tag{4}$$



Supposant par exemple

$$N=4,\quad n=70,\quad Q=1^{mc},\quad \varepsilon=2,$$

on trouve

$$v=0^{mc},4286.$$

La formule (4) pourra servir également à mesurer la quantité d'eau que reçoit chaque auget d'une roue établie. Pour cela, il suffira d'observer le nombre N de tours par minute, de compter le nombre n des augets, et de déterminer la dépense Q par l'une des formules données à la fin de la leçon XXVII.

PRINCIPE GÉNÉRAL DU MAXIMUM D'EFFET DANS LES ROUES HYDRAULIQUES.

111. Soit h la hauteur verticale de la chute comptée jusqu'à l'endroit où l'eau commence à frapper l'aube; soit aussi h' la hauteur verticale pendant laquelle le liquide agit sur l'aube; V étant la vitesse de l'eau en arrivant sur la roue, w la vitesse à sa sortie, u la vitesse perdue par l'effet du choc, P le poids de l'eau qui agit sur l'aube, on aura, en vertu du théorème de Carnot,

$$T_m - T_r = \frac{1}{2}\Sigma m\,(w^2 - V^2) + \frac{1}{2}\Sigma m u^2.$$

Mais ici les quantités V, w, u sont à très-peu près les mêmes, respectivement, pour toutes les molécules liquides; donc l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$T_m - T_r = \frac{1}{2}(w^2 - V^2)\,\Sigma m + \frac{1}{2}u^2\,\Sigma m,$$

et plus simplement encore,

$$T_m - T_r = \frac{1}{2}(u^2 + w^2)\,\Sigma m - \frac{1}{2}V^2\,\Sigma m.$$

Résolvant cette équation par rapport à T_r, il vient

$$T_r = T_m + \frac{1}{2}V^2\,\Sigma m - \frac{1}{2}(u^2 + w^2)\,\Sigma m.$$

Mais

$$T_m = Ph',\quad V^2 = 2gh,\quad \Sigma m = \frac{P}{g};$$

par conséquent

$$T_r = Ph' + Ph - \frac{1}{2}\frac{P}{g}(u^2 + w^2).$$

Posant, pour abréger, $h + h' = H$, on obtient enfin pour le travail transmis à la roue, et cela quelle que soit la forme de celle-ci,

$$(1) \qquad T_r = PH - \frac{1}{2}\frac{P}{g}(u^2 + w^2).$$

Nous ferons remarquer que cette formule repose sur des hypothèses qui ne se réalisent qu'imparfaitement dans la pratique. Il s'ensuit que, pour avoir le travail effectif, il faudra multiplier le travail théorique par un coefficient qui se déterminera par l'expérience.

Si l'on prend pour P le poids de l'eau qui sort de la vanne en une seconde, on aura, par la formule ci-dessus, le travail transmis à cette roue par cette quantité d'eau. On divisera par 75 pour avoir la force en chevaux.

On voit par la formule (1) que le travail transmis au récepteur sera d'autant plus grand que le deuxième terme sera moindre. La valeur maxima de T_r répondra donc au cas où l'on aura

$$u = 0, \quad w = 0.$$

Par conséquent, *pour produire le maximum d'effet, l'eau doit arriver sans choc sur la roue et en sortir sans vitesse.* C'est à remplir cette condition que doivent tendre les constructeurs de roues hydrauliques.

CALCUL DU TRAVAIL DANS LES ROUES A PALETTES PLANES EN GÉNÉRAL.

112. Soit α l'angle que la direction de la vitesse V de l'eau au moment où elle frappe l'aube fait avec la direction de la vitesse v de la roue (*fig.* 195). Comme le liquide en sortant de la roue possède à très-peu près la vitesse de celle-ci, on aura

$$w = v;$$

en même temps la valeur de u sera

$$u^2 = V^2 + v^2 - 2 V v \cos\alpha. \tag{1}$$

Substituant cette valeur dans la formule (1) du numéro pr
cédent, on trouve

$$T_r = P(H - h) + \frac{P}{g} v (V \cos\alpha - v). \tag{2}$$

VITESSE DU MAXIMUM D'EFFET.

Si l'on résout cette équation par rapport à v, il vient

$$v = \frac{1}{2} V \cos\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4} V^2 \cos^2\alpha + g(H - h) - \frac{g}{P} T_r}.$$

Mais on doit avoir

$$\frac{g}{P} T_r < \frac{1}{4} V^2 \cos^2\alpha + g(H - h),$$

afin que V soit une quantité réelle; donc la valeur maxima
T_r sera

$$T_r = \frac{1}{4} \frac{P}{g} V^2 \cos^2\alpha + P(H - h).$$

En même temps la valeur de v se réduit à

$$v = \frac{1}{2} V \cos\alpha. \tag{3}$$

Si dans la valeur maxima de T_r on remplace V par sa vale
$V^2 = 2gh$, on obtient simplement

$$T_r = PH - \frac{1}{2} P h (1 + \sin^2\alpha). \tag{4}$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que V était conn
Si c'est v qu'on se donne, on aura d'abord, en substituant
valeur (1) de u^2 dans la formule (1) du numéro précédent,

$$T_r = PH - \frac{1}{2} \frac{P}{g} (V^2 + 2 v^2 - 2 V v \cos\alpha).$$

Posant ensuite

$$V^2 - 2 V v \cos\alpha + 2 v^2 = m,$$

et résolvant par rapport à V, on trouve

$$V = v \cos\alpha \pm \sqrt{v^2 \cos^2\alpha + m - 2v^2}:$$

de là on conclut que la moindre valeur de m sera

$$m = 2v^2 - v^2 \cos^2\alpha = v^2 (1 + \sin^2\alpha);$$

par suite, la valeur de V devient

$$(5) \qquad V = v \cos\alpha.$$

Substituant dans l'expression précédente du travail pour la valeur maxima de T_r,

$$(6) \qquad T_r = PH - \frac{1}{2}\frac{P}{g} v^2 (1 + \sin^2\alpha).$$

On voit par les formules (4) et (6) que la valeur d'autant plus grande que l'angle α sera plus petit tion la plus favorable à donner à la lame d'eau répo au cas de $\alpha = 0$. Il faudra donc faire arriver le liq une direction normale à la palette; alors la vitesse, vail maximum, deviendront

$$(7) \qquad \begin{cases} v = \frac{1}{2} V, \\ T_r = PH - \frac{1}{2} Ph, \end{cases}$$

si la vitesse de l'eau est donnée; et

$$(8) \qquad \begin{cases} V = v, \\ T_r = PH - \frac{1}{2}\frac{P}{g} v^2, \end{cases}$$

si c'est la vitesse v de la roue qui soit donnée.

Enfin la deuxième des formules (7) montre que T_r tant plus grand que h sera moindre. Donc, *pour la m* *teur* H *de chute, les roues en dessus sont plus favor* *les autres.*

point milieu d'un auget; d'ailleurs la face qui reçoit le ch
du liquide étant plane, la formule générale (2) convient au
à cette espèce de roues.

Des expériences de M. Morin, faites en 1828, sur u
grande roue à augets en fer, de 10 mètres environ de diamèt
établie à Guebviller (Haut-Rhin), et en 1834 et 1835 sur
roues de $3^m,425$, $2^m,28$, $2^m,74$ de diamètre, ont montré
le terme P (H — h) devait être affecté du coefficient $0^m,$
de sorte que la formule qui donne T_r devient, en suppos
$\alpha = 0$,

$$(17) \qquad T_r = (0,78)\,P(H-h) + \frac{P}{g}v(V-v).$$

Dans les roues à augets qui prennent l'eau à la hauteur
l'axe, le coefficient pratique se réduit à $0^m,60$.

La vitesse à la circonférence doit être environ de 1 mètre
seconde. Pour une roue de 10 mètres de diamètre, elle pour
être réduite à $0^m,60$.

NOTIONS SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS.

113. *On sait que le mouvement relatif d'un corps est
mouvement de ce corps tel qu'on l'observe étant placé sur
deuxième corps regardé comme fixe.*

*La vitesse relative du premier mobile est la vitesse t
qu'on l'observe du second.*

Si le premier mobile est en repos, l'observateur lui at
bue un mouvement égal et contraire à celui dont lui-même
animé.

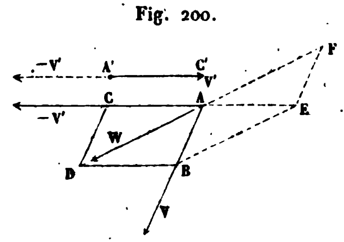
Il est évident que le *mouvement relatif de deux corps
sera pas changé si on leur imprime un mouvement comm*

On prend ordinairement ce mouvement commun égal
contraire à celui de l'un des deux mobiles, lequel se tro
ainsi réduit au repos. L'autre mobile se meut alors autour
celui-ci, en vertu de deux mouvements; l'un de ces mou
ments est le sien propre, l'autre est égal et contraire à celui
mobile rendu fixe.

DÉTERMINATION DE LA VITESSE RELATIVE DE DEU

Soient A et A′ (*fig.* 200) deux mobiles animés, de la vitesse AB = V, le deuxième de la vitesse A′

Fig. 200.



je veux trouver l lative du mobile port à A′, j'im deux mobiles un commun égal et celui du mobile sorte le point A duit au repos, tandis que le point A sera animé simultanées AB = V, AC = − V′. Composant ce nières vitesses par la règle du parallélogramme des vitesse résultante AD = W sera la vitesse relative A, c'est-à-dire la vitesse du point A telle que l'obs point A′ un spectateur qui participerait au mouve dernier point. Donc *pour obtenir la vitesse de de il faut composer la vitesse absolue de l'un d'eux vitesse égale et contraire à la vitesse absolue de l'*

Réciproquement, *si l'on compose la vitesse abso point* A, *avec une vitesse* AF *égale et contraire à relative* AD, *on aura la vitesse absolue* AE *du po* même *si l'on compose la vitesse relative* AD *du poi une vitesse* AE *égale en grandeur et en direction à absolue du point* A′, *on aura la vitesse absolue* A A. La figure ci-dessus met en évidence ces deux derr positions.

Ainsi, par exemple, la vitesse relative de deux chemins de fer est égale à la somme ou à la différenc vitesses absolues, suivant qu'ils marchent en sens i dans le même sens.

THÉORIE DE LA ROUE PONCELET; FORMULES PRAT

114. Soient V la vitesse de l'eau au moment où elle l'aube, et v la vitesse de l'aube; la vitesse relative d

rapport à l'aube regardée comme fixe sera

$$V - v.$$

En vertu de cette vitesse relative, le liquide s'élèvera dans l'aube jusqu'à une hauteur verticale h telle, qu'on aura

$$(1) \qquad h = \frac{(V - v)^2}{2g}.$$

A ce moment la vitesse relative de l'eau sera nulle; puis elle redescendra en vertu de son propre poids, et reprendra successivement les vitesses que la pesanteur lui a fait perdre. Enfin le liquide sortira de l'aube avec la même vitesse relative qu'en y entrant; mais cette vitesse sera dirigée en sens contraire : elle aura donc pour valeur

$$-(V - v).$$

Composant cette vitesse relative avec la vitesse absolue v de l'aube, on aura la vitesse absolue W de l'eau sortant de l'aube, savoir

$$(2) \qquad W = v - (V - v) = 2v - V.$$

Si l'on substitue cette valeur de W dans l'équation (1) du n° 111, on trouve

$$T_r = PH - \frac{1}{2}\frac{P}{g}\left[u^2 + (2v - V)^2\right].$$

Mais dans la roue Poncelet l'eau arrive sans choc, puisque le liquide entre dans les aubes tangentiellement, du moins à très-peu près; donc

$$u = 0,$$

et par suite

$$(3) \qquad T_r = PH - \frac{1}{2}\frac{P}{g}(2v - V)^2.$$

Développant le carré, et remplaçant ensuite V^2 par sa valeur, $V^2 = 2gH$, on trouve

$$(4) \qquad T_r = 2\frac{P}{g}v(V - v).$$

Si l'on compare cette valeur avec celle de T_r donnée par la

formule (9) du nº 112, on voit que, toutes chose *roue Poncelet utilise deux fois plus de travail q palettes planes et en dessous.*

La formule (3) fait voir que si l'on règle la m manière à faire prendre à la circonférence exté roue une vitesse

(5) $$v = \frac{1}{2} V,$$

T_r acquerra sa valeur maxima, savoir

(6) $$T_r = PH.$$

D'où il suit que *la roue Poncelet utilise toute la f que de la chute, lorsqu'on fait prendre à la ci extérieure du récepteur une vitesse égale à la n vitesse de l'eau sortant de la vanne.*

Ce résultat remarquable tient à ce que pour $v =$ sort de la roue sans vitesse, ainsi qu'on le voit mule (2).

Si dans l'équation (1) on remplace v par sa val vient

$$h = \frac{1}{8} \frac{V^2}{g}.$$

Mais

$$V^2 = 2gH;$$

donc

(7) $$h = \frac{1}{4} H.$$

Par conséquent *la hauteur des aubes, mesurée sur l du centre de la roue, doit être au moins égale au hauteur de la chute.*

Il résulte de l'expérience que la vitesse du maxin n'est pas précisément

$$v = \frac{1}{2} V,$$

mais moyennement

(8) $$v = (0,55) V.$$



lame liquide font avec le plan de la palette; enfin j'appelle
la vitesse de l'eau au moment où elle frappe la palette, et v
vitesse que prend la roue lorsque le mouvement uniforme
établi. Si l'on décompose les vitesses V et v suivant les lign
ON, OP, on sera conduit aux résultats suivants :

Vitesse de l'eau suivant OP. . . . . $= \mathrm{V}\cos\beta$.

Vitesse de l'eau suivant ON. . . . . $= \mathrm{V}\sin\beta$.

Vitesse de la roue suivant OP. . . . . $= -v\cos\alpha$.

Vitesse de la roue suivant ON. . . . . . . $= v\sin\alpha$.

Si, par les règles données au commencement du n° 113,
cherche les composantes de la vitesse relative de l'eau, estim
suivant OP, ON, on trouve :

Vitesse relative de l'eau suivant OP. . . . $= \mathrm{V}\cos\beta + v\cos\alpha$.

Vitesse relative de l'eau suivant ON. . . . $= \mathrm{V}\sin\beta - v\sin\alpha$.

Mais il est évident que la vitesse relative de l'eau norm
à la palette est détruite par la résistance de celle-ci, on au
donc

$$(1) \qquad u = \mathrm{V}\sin\beta - v\sin\alpha.$$

Remarquons maintenant que pour avoir la vitesse absolue
l'eau il faut composer sa vitesse relative V_1 (*fig.* 202) avec
vitesse absolue de la roue prise suivant
direction, ce qui donne

Fig. 202.

$$(2) \qquad \mathrm{W}^2 = v^2 + \mathrm{V}_1^2 - 2\mathrm{V}_1 v\cos\alpha;$$

mais

$$(3) \qquad \mathrm{V}_1 = +\mathrm{V}\cos\beta + v\cos\alpha.$$

Substituant dans (2) et réduisant, on trouve

$$(4) \qquad \mathrm{W}^2 = \mathrm{V}^2\cos^2\beta + v^2\sin^2\alpha.$$

D'un autre côté on tire de la formule (1)

$$u^2 = \mathrm{V}^2\sin^2\beta + v^2\sin^2\alpha - 2\mathrm{V}v\sin\beta\sin\alpha;$$

par suite

$$u^2 + \mathrm{W}^2 = \mathrm{V}^2 - 2v\sin\alpha(\mathrm{V}\sin\beta - v\sin\alpha).$$

Substituant cette valeur dans la valeur ci-dess trouve

$$(5) \qquad T_r = PH - \frac{1}{2}\frac{P}{g}[V^2 - 2v \sin\alpha (V \sin\beta - v \text{ si}$$

Mais on a, à très-peu près, $V^2 = 2gH$, car la h cale de la palette est très-petite par rapport à H quent

$$(6) \qquad T_r = \frac{P}{g} v \sin\alpha (V \sin\beta - v \sin\alpha).$$

Dans cette formule, il faut prendre pour v centre de la palette, car on peut regarder l'actio liquide comme étant concentrée en ce point. Rig parlant, c'est au centre de la palette que doit se raisonnement qui précède.

VITESSE DU MAXIMUM D'EFFET.

Si l'on résout l'équation (6) par rapport à v, on

$$v = \frac{1}{2} V \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{4} V^2 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} - \frac{g}{P \sin^2\alpha} T}$$

Pour que T_r soit un maximum, il faut qu'on ait

$$\frac{g}{P \sin^2\alpha} T_r = \frac{1}{4} V^2 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha},$$

d'où l'on tire

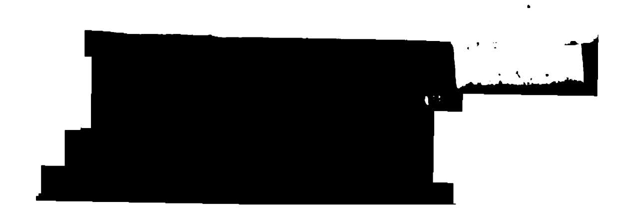
$$(7) \qquad T_r = \frac{1}{4}\frac{P}{g} V^2 \sin^2\beta.$$

La vitesse de la roue devient alors

$$(8) \qquad v = \frac{1}{2} V \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

On peut remarquer que la valeur de T_r sera d'a grande que l'angle β sera lui-même plus grand. *donc, autant que possible, diriger les filets d'eau no à la palette.*

L'équation (8) fait voir à son tour que le degré d'



de la palette sur l'horizon n'influe que sur la vitesse de l
roue. *On voit que cette vitesse sera d'autant plus grande qu*
l'inclinaison de la palette sur l'horizon sera plus petite.

La formule (6) fait voir que la valeur de T_r sera d'autant plu
grande que la vitesse V de l'eau, au moment où elle frappe l
palette, sera elle-même plus grande.

INCLINAISON LA PLUS FAVORABLE DES PALETTES.

Si l'on résout l'équation (6) par rapport à $\sin\alpha$, on trou

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{V}{v}\sin\beta \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{V^2}{v^2}\sin^2\beta - \frac{g}{Pv^2}T_r}.$$

La valeur maxima de T_r aura donc pour valeur

(9) $$T_r = \frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2\sin^2\beta;$$

laquelle coïncide avec (7).

L'angle α sera donné ensuite par l'équation

(10) $$\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{V}{v}\sin\beta.$$

Etant données la vitesse V de l'eau, celle de v de la rou
l'angle β de chute, l'équation (10) fera connaître l'inclinais
des palettes sur l'horizon pour laquelle le travail transmis à
roue sera le plus grand possible.

FORMULES PRATIQUES POUR LES ROUES A PALETTES INCLINÉE

Des expériences faites en 1820, sur une des roues du moul
des Minimes, à Toulouse, par MM. Tardy et Piobert, o
établi que le coefficient pratique des formules qui précède
varie de 0,70 à 0,75. En adoptant 0,70, la formule généra
(6) devient

(11) $$T_r = (0,70)\frac{P}{g}v\sin\alpha\,(V\sin\beta - v\sin\alpha),$$

et la formule (7), qui répond au maximum d'effet,

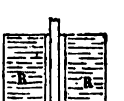
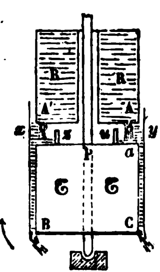
(12) $$T_r = (0,175)\frac{P}{g}V^2\sin^2\beta.$$

THÉORIE DE LA TURBINE BURDIN; FORMULES PR

116. La turbine Burdin a été imaginée en 1824;
s'est proposé de faire arriver l'eau dans la roue sa
la faire sortir sans vitesse.

La hauteur de la chute est divisée en deux pa
(*fig.* 203). La partie supérieure est occupée par le r

Fig. 203.

la partie inférieure par la rou
voir est un cylindre RR à a
ouvert à sa partie supérieure
dans la rivière qui doit alimen
Le récepteur consiste en un t
dont l'axe traverse le réserv
tourne inférieurement dans u
dine. La roue fait corps avec
le fait tourner sur lui-même.
du tambour se trouve une bâche *xzyu*, percée de c
débouchent inférieurement en B et C, et tangentiell
circonférence que ces points décrivent. La rotation
est produite par la réaction due à l'écoulement du liq
évident que cette rotation doit se faire en sens invers
vement de l'eau. Aux points A et A', le réservoir e
trous portant des conduits qui font sortir l'eau tangen
à la circonférence et dans le sens du mouvement de l
l'on nomme ω la vitesse angulaire de rotation de c
qu'on pose $a\text{P} = r$, la vitesse du point a de la bâch
alors pour éviter le choc de l'eau on posera

$$\text{V} = \omega r, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{\text{V}}{r},$$

V étant la vitesse de l'eau au point a. De la sorte,
relative de l'eau, entrant dans la bâche de la roue, s
et il n'y aura pas de choc. Ainsi dans la turbine Bur

$$(1) \qquad u = 0.$$

Remarquons maintenant que l'eau, en circulant da
duits de la roue, acquerra dans sa chute une vitesse



de plus cette vitesse sera dirigée en sens contraire du mouv ment de la roue. D'un autre côté, le liquide possède la vites de la roue; par conséquent si l'on place les conduits de sor de manière qu'on ait $r_1 = r$, r_1 étant la distance à l'axe point par où l'eau s'échappe, on aura

$$V = \omega r_1;$$

l'eau possédera donc une vitesse V dirigée en sens contra du mouvement de la roue, et il en résultera que sa vite absolue de sortie sera nulle. On aura donc

$$(2) \qquad w = 0.$$

Au moyen des valeurs précédentes de u et de w, l'équation du n° 111 devient

$$(3) \qquad T_m = PH.$$

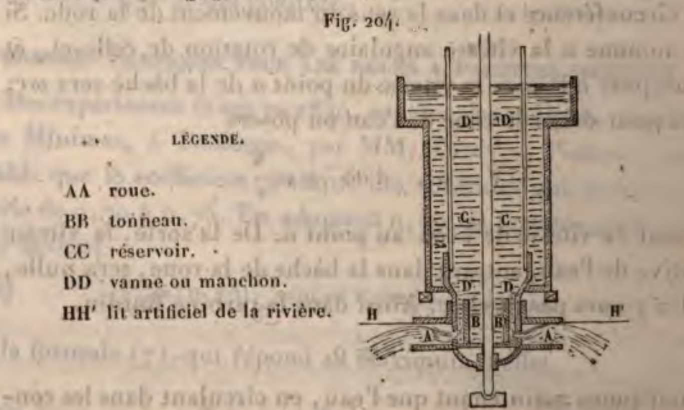
D'après M. Burdin (*Annales des Mines*, 2[e] série, p. 51 le coefficient pratique de la formule précédente s'élève à 0,7 par conséquent la formule à employer dans la pratique sera

$$(4) \qquad T_m = (0,75)\,PH.$$

THÉORIE DE LA TURBINE FOURNEYRON; FORMULES PRATIQUE

117. Concevons une roue à aubes courbes, telle que la r de M. Poncelet (*fig.* 204 et 205), mais dont l'axe soit vertic

Fig. 204.



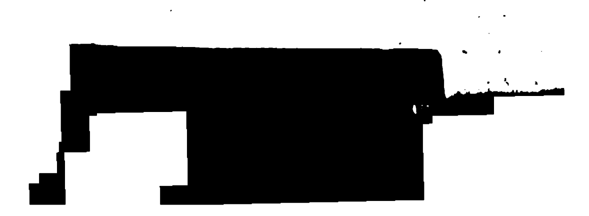
La paroi cylindrique à laquelle sont adaptées les aubes, porte

larges ouvertures verticales par où l'eau sort de l'
la roue pour frapper les aubes (*fig.* 204). Afin
l'eau une direction à peu près tangente à la circ
la roue et normale aux aubes, on la reçoit dans
ou tonneau emboîté dans l'intérieur de la roue e
qu'elle. Dans ce cylindre qui reste fixe pendant la
la roue, se trouvent des cloisons courbes à peu pr
à sa circonférence. A l'intervalle entre deux clo
cutives correspond, sur la surface latérale du cy
ouverture par où l'eau sort tangentiellement à sa ci
et dans une direction à peu près normale aux aube
La pression de l'eau sur les aubes fait tourner l
cloisons du tonneau ont une hauteur à peu près do
de la roue; au-dessus le tonneau s'élargit, formant
de réservoir.

La roue repose sur une calotte sphérique en
le fond est fixé à l'axe de la roue. Cet axe se tern
pivot qui tourne dans une crapaudine. Le réservoi
à sa partie supérieure par laquelle il reçoit l'eau.
entièrement plongé dans le liquide; alors le canal
artificiel au-dessous duquel se trouvera la roue.

Les cloisons courbes pratiquées dans le tonneau
nom de *directrices*, parce qu'en effet elles diriger
les aubes. Il n'est pas nécessaire que toutes ces clois
d'un noyau intérieur; elles peuvent s'en approcl
moins; il suffit qu'elles aboutissent aux ouvertur
par lesquelles l'eau sort du tonneau. Pour amen
moins d'eau sur les aubes, on se sert d'un manc
lindre qui entre dans le tonneau, et qui bouche ses
jusqu'à telle profondeur qu'on veut.

Un des grands avantages de cette turbine, c'es
entre de toutes parts et agit sur toutes les aubes à
roue ne supporte pas une haute colonne d'eau con
turbine Burdin, et par conséquent n'a pas un poid
sidérable. L'orifice du tonneau peut être entièrem
qui permet à la roue de marcher même dans le



fortes gelées ou de grandes crues d'eau, où les autres rou
hydrauliques cessent de marcher.

Il y a certaines de ces turbines qui font jusqu'à 2300 tou
par minute.

* Soient

T_r le travail transmis à la roue pendant l'action de l'eau s
une aube,

V la vitesse de l'eau au sortir des courbes directrices,

H la hauteur de la chute comptée jusqu'à la face inférieu
de la roue,

V_0 la vitesse relative de l'eau à son entrée dans les aubes,

V_1 sa vitesse relative à la sortie,

ω la vitesse angulaire de rotation,

r_0 la distance à l'axe de la roue du premier élément super
ciel d'une aube,

r_1 la distance à l'axe du dernier élément,

r la distance à l'axe d'une molécule liquide quelconque pe
dant que l'eau agit sur l'aube,

P le poids de l'eau agissant sur une aube.

En vertu de la formule (1) du n° **111**, on aura

$$T_r = PH - \frac{P}{2g}(w^2 + u^2),$$

w étant toujours la vitesse de l'eau à la sortie de la roue,

Fig. 205.



la vitesse perdue par le ch
Si l'on compose la vitess
de l'eau (*fig.* 205), avec
vitesse de la roue, prise
sens contraire de sa dir
tion, on aura la vitesse re
tive V_0 de l'eau à son ent
dans l'aube, ce qui donne

$$V_0^2 = V^2 + v_0^2 - 2Vv_0 \cos(V,$$

remplaçant v_0 par sa valeur, $v_0 = \omega r_0$, cette équation devi

$$(1) \qquad V_0^2 = V^2 + \omega^2 r_0^2 - 2V\omega r_0 \cos(V, v_0).$$

On peut remarquer que l'angle (V, v_0) est l'angl
courbe directrice de l'eau fait avec la circonférenc

Pour déterminer V_1, remarquons que le travail
dant qu'elle agit sur une aube a pour valeur

$$\frac{P}{2g}(V_1^2 - V_0^2).$$

Mais cette eau est soumise à l'action de la pesant
travail ici est nul, puisque chaque molécule d'ea
horizontalement ou perpendiculairement à la dir
force. Elle est aussi soumise à l'action de la forc
dont le travail a pour valeur

$$\frac{P}{g}\omega^2 \int_{r_0}^{r_1} rdr = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\omega^2(r_1^2 - r_0^2);$$

égalant ces deux valeurs du même travail, il vient

$$(2) \qquad V_1^2 = V_0^2 + \omega^2(r_1^2 - r_0^2).$$

On remarquera aussi que la vitesse relative V_0 de
compose en deux en entrant dans une aube, l'un
celle-ci, l'autre normale; γ étant l'angle d'incli
l'aube, la vitesse perdue aura pour valeur

$$(3) \qquad u = V_0 \sin\gamma.$$

De là il suit qu'on aura

$$u = 0,$$

si $\gamma = 0$, c'est-à-dire si l'aube, à sa naissance, est diri
V_0. Nous adopterons cette hypothèse.

Enfin la vitesse absolue w de l'eau à la sortie des

$$w^2 = V_1^2 + v_1^2 - 2V_1 v_1 \cos(V_1, -v_1),$$

et comme

$$v_1 = \omega r, \quad (V_1, -v_1) = \varphi,$$

cette équation devient

$$(4) \qquad w^2 = V_1^2 + \omega^2 r_1^2 - 2V_1 \omega r_1 \cos\varphi.$$



S'il était possible de faire à la fois

$$\varphi = 0, \quad V_1 = \omega r_1,$$

on aurait aussi

$$w = 0;$$

mais cette double hypothèse ne peut être admise, car l'eau sortant avec une vitesse nulle de la roue de la turbine, ne pourrait se dégager et gênerait le mouvement de l'aube suivante. M. Fourneyron s'est contenté de faire

$$(5) \qquad \omega r_1 = V_1 \quad \text{et} \quad \varphi = 15^\circ.$$

Alors on trouve par l'équation (4)

$$(6) \qquad w^2 = 2\omega^2 r_1^2 (1 - \cos\varphi) = 4\omega^2 r_1^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi.$$

L'hypothèse (5) introduite dans l'équation (2) donne

$$(7) \qquad V_0 = \omega r_0.$$

Par conséquent, *si l'eau sort de la roue avec une vitesse rélative égale à la vitesse absolue de celle-ci, elle y entre avec une vitesse relative qui est aussi égale à la vitesse absolue de la roue, cette vitesse étant mesurée sur la circonférence interne.*

Si l'on introduit dans l'équation (1) l'hypothèse $V_0 = \omega r_0$, cette équation devient

$$(8) \qquad V = 2\omega r_0 \cos(V, v_0),$$

de laquelle on tire

$$(9) \qquad \omega = \frac{V}{2 r_0 \cos(V, v_0)};$$

laquelle fait connaître la vitesse de la roue, en fonction de la vitesse due à la hauteur de la chute.

Enfin le triangle VaV_0 de la figure donne

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\sin\psi}{\sin(V, v_0)},$$

ψ étant l'angle que l'aube, à sa naissance, fait avec la circonférence interne ; de là on tire

$$(10) \qquad V = \frac{V_0 \sin\psi}{\sin(V, v_0)}.$$

Comparant avec l'équation (8) et remplaçant V_0 par sa valeur $V_0 = \omega r_0$, il vient

$$\sin\psi = 2\sin(V, v_0)\cos(V, v_0) = \sin 2(V, v_0), \tag{11}$$

d'où

$$\psi = 2(V, v_0). \tag{12}$$

Ce résultat fait voir que *l'inclinaison des aubes sur la circonférence interne doit être double de l'inclinaison des courbes directrices sur la même circonférence.*

Maintenant si dans la valeur de T_r on fait $u = 0$, et qu'ensuite on y remplace w par sa valeur (6), on trouve d'abord

$$T_r = PH - 2\frac{P}{g}\omega^2 r_1^2 \sin^2\frac{1}{2}\varphi. \tag{13}$$

Remplaçant ω^2 par sa valeur (9), il vient

$$T_r = PH - \frac{P}{g}\frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos^2(V, v_0)}V^2. \tag{14}$$

Dans les petites turbines, on prend ordinairement

$$\frac{r_0}{r_1} = 0,70;$$

dans les grandes, on adopte

$$\frac{r_0}{r_1} = 0,75, \quad \text{ou} \quad 0,83.$$

Le coefficient pratique relatif à la turbine Fourneyron est égal à 0,70; par conséquent, le travail effectif que l'eau motrice transmet à la roue, a pour valeur

$$T_r = (0,70)\left[PH - \frac{P}{g}\frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos^2(V, v_0)}V^2\right].$$

La turbine Fourneyron convient à toutes les chutes. Elle peut marcher à des vitesses très-différentes et fonctionner dans

Le coefficient du travail théorique paraît être égal à $0^m,6$
pour les chutes de 2 mètres et au-dessus, et pour des ouver-
tures de vannes variant de $0^m,08$ à $0^m,12$. Les équations (4
et (6) deviennent ainsi

$$(9) \qquad T_r = (1,3)\frac{P}{g}v(V - v),$$

$$(10) \qquad T_r = (0,65)\,PH.$$

Le coefficient pratique des mêmes formules s'élève à $0^m,7$
pour les chutes de $1^m,50$ et au-dessous, et pour des ouver-
tures de vannes variant de $0^m,20$ à $0^m,30$. Dans ce cas, on

$$(11) \qquad T_r = (1,5)\frac{P}{g}v(V - v),$$

$$(12) \qquad T_r = (0,75)\,PH.$$

pourra se proposer sur les roues à palettes plane marque que ces formules renferment neuf quant V, h, P, l, ε, v, N, R, T_r, on en conclut qu'c donner à volonté cinq d'entre elles. Alors les foı ront connaître les quatre autres. Si l'on prend, ȷ

$$h = 1^{m},50, \quad l = 1^{m},80, \quad \varepsilon = 0^{m},15, \quad R = 2^{m}$$

on trouve

$$V = 5^{m},424,$$
$$v = 4^{m},1888,$$
$$P = 1098^{k},36,$$
$$T_r = 347^{km},58 = 4^{chev},63.$$

DISPOSITIONS GÉNÉRALES DANS L'ÉTABLISSEMENT I HYDRAULIQUE.

L'établissement d'une roue hydraulique exige q positions générales que nous allons exposer somm

1°. On doit s'arranger de manière à retirer de plus grand effet possible.

2° La vanne doit être inclinée et se rapprocher le ble de la roue.

3°. Si le liquide agit par un déversoir, celui-ci placé immédiatement auprès de la roue.

4°. Le canal d'arrivée devra être aussi grand qu il faudra que sa section soit au moins égale à dix ou la largeur de l'orifice.

5°. Quand cela sera possible, il faudra donner fuite une largeur plus grande que celle du cours roue.

Les autres dispositions sont relatives à chaque rou culier.

CALCUL D'UNE ROUE A ÉTABLIR.

Supposons, par exemple, que l'on veuille établir 1 dessous à palettes planes d'une force donnée.

Si l'on choisit arbitrairement cinq des quantités (



dans les formules (1), savoir :

$$T_r = 10^{ch} = 750^{km},$$
$$h = 1^{m},50,$$
$$R = 2^{m},$$
$$l = 1^{m},80,$$
$$N = 10,$$

il restera à déterminer les quatre autres V, v, P, ε.

La première des formules citées fera connaître V.

La troisième donnera v.

La quatrième déterminera P.

Et la seconde donnera la valeur de ε.

Effectuant les calculs, on trouve

$$V = 5^{m},424,$$
$$v = 2^{m},094,$$
$$P = 1758^{kil},$$
$$\varepsilon = 0^{m},27.$$

Les dimensions et le nombre des palettes se détermineront par ce qui a été dit au commencement du nº 109.

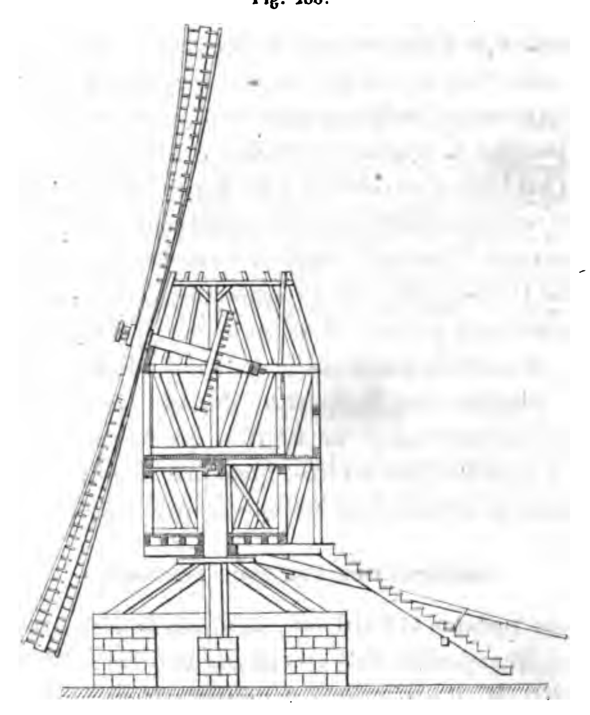
TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

DES MOULINS A VENT.

DESCRIPTION SOMMAIRE D'UN MOULIN A VENT.

119. L'axe autour duquel tourne la roue est parallèle à la direction du vent (*fig.* 206), et à peu près horizontal. Dans

Fig. 206.



les plaines de la Flandre et de la Belgique, l'inclinaison de l'axe sur l'horizon varie de 8 à 15 degrés. La roue se compose de quatre ailes généralement rectangulaires; ces ailes sont appliquées sur des pièces de bois prismatiques appelées

volants, et dont les axes se coupent à angles droits. On allonge les volants par d'autres pièces moins fortes appelées *entes*. L'aile commence généralement à 2 mètres de distance de l'axe de rotation. La longueur des volants varie de 6 mètres à $6^m,50$; les entes ont ordinairement 7 mètres de long; l'extrémité de chaque aile décrit donc une circonférence de 13 mètres à $13^m,50$ de rayon. Comme l'aile commence à 2 mètres de distance de l'axe, il en résulte que la longueur de celle-ci est environ de 11 mètres ou $11^m,50$; on donne ordinairement à l'aile une largeur qui est à peu près le cinquième ou le sixième de sa longueur (*).

SURFACE DE L'AILE.

La surface de l'aile est une surface gauche engendrée par le mouvement d'une droite qui, restant toujours perpendiculaire à l'axe du volant, s'incline de plus en plus sur l'axe de rotation. Ordinairement la génératrice la plus voisine de l'axe fait avec celui-ci un angle d'environ 60 à 62 degrés, tandis que pour la dernière cet angle s'élève jusqu'à 80 degrés environ. Cette surface est recouverte d'une toile destinée à recevoir l'action du vent.

Quand la vitesse de celui-ci augmente, celle des ailes pourrait devenir trop grande; alors on modère l'action de la force motrice en enroulant une partie de la toile. Enfin pour placer l'axe de rotation dans la direction du vent, on fait tourner à bras la partie supérieure du moulin, qui forme une sorte de calotte à laquelle l'axe est fixé. Quelques moulins s'orientent d'eux-mêmes, à l'aide d'un mécanisme particulier.

CONSTRUCTION PRATIQUE DES AILES.

D'après Smeaton et Coulomb, la forme la plus avantageuse des ailes, quand elles sont rectangulaires, est celle des ailes dites *hollandaises*, qui offrent une surface légèrement concave, et dont les génératrices (ou *lattes*) sont disposées comme suit :

(*) Dans les moulins des environs de Lille, la surface de l'aile est située d'un même côté du volant; elle commence tout près de l'arbre de la roue.

Concevons le rayon de l'aile partagé en 40 parties égales. Comptons 10 de ces parties à partir du centre ; c'est là que nous placerons la latte n° 1 ; portons-en 6 à la suite, nous placerons la latte n° 2 sur la 6e division, et ainsi de suite. Les angles que les lattes font avec l'axe de rotation, et avec le plan du mouvement, sont réglés comme suit :

Nos DES LATTES.	ANGLE FAIT AVEC L'AXE DE ROTATION.	ANGLE FAIT AVEC LE PLAN DU MOUVEMENT.
1	72°	18°
2	71°	19°
3	72°	18°
4	74°	16°
5	77° 30′	12° 30′
6	83°	7°

VITESSE DES AILES PAR RAPPORT A CELLE DU VENT.

Les ailes étant construites, comme il vient d'être dit, on doit, pour le meilleur effet, maintenir leur vitesse dans un rapport constant avec la vitesse du vent. Cette vitesse de rotation, mesurée à l'extrémité des ailes, doit être à celle du vent comme 2,6 ou 2,7 est à 1. D'après Coulomb, ce rapport est compris entre 2,5 et 2,6.

QUANTITÉ DE TRAVAIL TRANSMIS AUX AILES.

Il résulte des expériences de Coulomb et de Smeaton que la quantité de travail reçue par une aile est exprimée par la formule

$$(1) \qquad T_r = (0,13)\,\Omega\,V^{3\,\text{km}},$$

dans laquelle Ω représente la surface de l'aile, et V la vitesse du vent par seconde. V doit être exprimé en mètres, et Ω en mètres carrés. La vitesse la plus convenable au travail parait être celle de 6 à 7 mètres.

EFFORT QUI AGIT A L'EXTRÉMITÉ DE L'AILE.

Soit P cet effort ; v étant la vitesse de l'extrémité de l'aile, le

travail par seconde sera Pv, et l'on aura

$$Pv = T_r = (0,13)\,\Omega V^3.$$

Mais

$$v = (2,6)V;$$

donc

$$P = \frac{0,13}{2,6}\,\Omega V^2,$$

et en réduisant

$$(2)\qquad P = \frac{1}{20}\,\Omega V^2.$$

Si nous supposons, par exemple, que la longueur de l'aile soit de 11 mètres, sa largeur de 2 mètres, et enfin que la vitesse V du vent soit de 7 mètres, on aura d'abord

$$\Omega = 22^{mq}.$$

La formule (2) donne ensuite

$$P = 53^k,9.$$

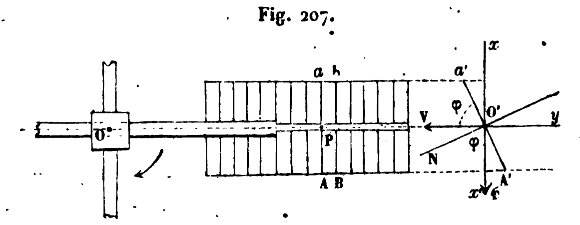
En multipliant ce nombre par $(2,6)V = 18,2$, on aura le travail transmis à une aile, savoir

$$T_m = 980^{km},98 = 13^{ch},08.$$

THÉORIE MATHÉMATIQUE DES MOULINS A VENT.

* 120. Je supposerai que la *fig.* 207 représente une pro-

Fig. 207.



jection de l'aile faite sur le plan du mouvement, c'est-à-dire sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du moulin. Considérons deux positions infiniment voisines, Aa, Bb, de la génératrice de l'aile; il sera évidemment permis d'admettre que ces deux lignes comprennent une petite surface plane. Je

prends un deuxième plan de projection perpendiculaire à l'axe OO′ du volant, et soit xx' la ligne de terre; cette ligne représentera la direction dans laquelle se meut le point (P, O′). Soit v la vitesse de ce point, que je supposerai dirigée de O′ vers x'; si sur xx' j'élève une perpendiculaire O′y, cette ligne représentera sur le plan latéral la projection de l'axe de rotation; le prolongement O′V de cette ligne sera la direction de la vitesse V du vent. Enfin la projection latérale de la latte Aa se fera en vraie grandeur sur A′a'. Cela posé, je mène O′N normale à la latte A′a', puis je décompose les deux vitesses V, v, suivant O′N et O′a', ce qui donne les résultats suivants :

Composante de V suivant $O'N = V \sin \varphi$,

Composante de V suivant $O'a' = V \cos \varphi$,

Composante de v suivant $O'N = v \cos \varphi$,

Composante de v suivant $O'a' = - v \sin \varphi$.

Si l'on compose les vitesses ci-dessus du vent avec celles de la roue, prises en sens contraire de leurs directions, on aura les composantes de la vitesse relative du vent; et comme la vitesse relative parallèle à l'élément superficiel de l'aile ne saurait évidemment contribuer au mouvement de celle-ci, n'ayant d'autre effet que de faire glisser le vent à la surface, il n'y a lieu de considérer que la vitesse relative normale, laquelle a pour valeur

$$V \sin \varphi - v \cos \varphi.$$

Mais en vertu de la théorie de la résistance des fluides, la résistance au mouvement de l'élément superficiel de l'aile est proportionnelle à sa surface, à la densité de l'air, au carré de la vitesse relative normale du fluide. Donc si l'on pose $OP = r$, $A'a' = l$, qu'on désigne par K un coefficient constant, et par D le poids de l'air sous l'unité de volume, la force motrice agissant sur l'élément superficiel que l'on considère aura pour valeur

$$\frac{KDl\,dr}{g}(V \sin \varphi - v \cos \varphi)^2.$$

Remarquons maintenant que cette pression se décompose en deux autres dirigées suivant $O'v$ et $O'V$; l'une,

$$\frac{KDldr}{g}(V\sin\varphi - v\cos\varphi)^2\cos\varphi,$$

fait tourner la roue, tandis que l'autre,

$$\frac{KDldr}{g}(V\sin\varphi - v\cos\varphi)^2\sin\varphi,$$

parallèle à l'axe de rotation, ne peut produire qu'une pression sur la crapaudine.

Si l'on multiplie la première force par v, on aura son travail en une seconde, savoir

$$\frac{KDldr}{g}(V\sin\varphi - v\cos\varphi)^2 v\cos\varphi.$$

Mais chacun des éléments plans de l'aile donne lieu à un travail analogue; donc le travail total transmis à la roue aura pour valeur

$$(1) \qquad T_r = \frac{KDl}{g}\int_{r_0}^{r_1} v\cos\varphi\,(V\sin\varphi - v\cos\varphi)^2\,dr.$$

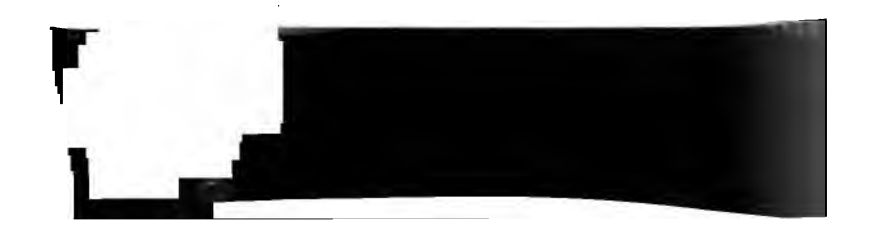
Dans cette formule, φ doit être considéré comme une fonction de r exprimant la loi de génération de l'aile.

Si l'on veut déterminer φ en fonction de r sous la condition que T_r soit un maximum, il suffira évidemment de rendre maximum le travail élémentaire relatif à chaque élément superficiel, et par conséquent la quantité

$$v\cos\varphi\,(V\sin\varphi - v\cos\varphi)^2\,dr.$$

Pour cela il y aura deux cas à considérer, suivant que le maximum se rapportera à l'angle φ, c'est-à-dire à la forme de l'aile, ou bien à la vitesse de ses éléments, sa forme étant donnée. Le rayon r du centre de l'élément superficiel étant pris pour variable indépendante, dr est constant, par conséquent il faut simplement rendre maximum la fonction

$$v\cos\varphi\,(V\sin\varphi - v\cos\varphi)^2.$$



I[er] CAS. v étant donné, pour obtenir le maximum de la fonction ci-dessus, on doit prendre sa dérivée par rapport à φ, puis égaler cette dérivée à zéro, ce qui donne

$$(V\sin\varphi - v\cos\varphi)\left[\begin{array}{l} 2(V\cos\varphi + v\sin\varphi)\cos\varphi \\ -(V\sin\varphi - v\cos\varphi)\sin\varphi \end{array}\right] = 0.$$

Mais le premier facteur de cette équation ne peut être nul, sans quoi T_r serait nul; donc la condition du maximum devient simplement

$$(2)\quad 2(V\cos\varphi + v\sin\varphi)\cos\varphi - (V\sin\varphi - v\cos\varphi)\sin\varphi = 0,$$

de laquelle on tire

$$\tan^2\varphi - \frac{3v}{V}\tan\varphi - 2 = 0.$$

Soit ω la vitesse angulaire de rotation, on a

$$v = r\omega,$$

par suite l'équation précédente se transforme dans celle-ci

$$(3)\quad \tan^2\varphi - 3\frac{\omega}{V}r\tan\varphi - 2 = 0.$$

Résolvant et rejetant la racine négative, on trouve

$$(4)\quad \tan\varphi = \frac{3}{2}\frac{\omega}{V}r + \sqrt{2 + \frac{9}{4}\frac{\omega^2}{V^2}r^2}.$$

Pour une vitesse du vent de $4^m,05$ par seconde, qu'on peut regarder comme étant la plus ordinaire, et pour une rotation de 7 tours par minute, ce qui donne

$$\omega = 0,733,$$

on trouve par la formule (4)

$$\varphi_0 = 64^\circ 4' 52'', \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 82^\circ 13' 58'',$$

pour les inclinaisons, sur l'axe du moulin, de la première et de la dernière latte.

Ces résultats s'accordent assez bien avec les observations de Coulomb.

La théorie qui précède est due à M. Coriolis.

IIe Cas. Reprenons la fonction.

$$v \cos \varphi (V \sin \varphi - v \cos \varphi)^2.$$

Comme ici la quantité φ est supposée donnée par la loi de la génération de l'aile, il suffit de prendre par rapport à v la dérivée de la fonction

$$v (V \sin \varphi - v \cos \varphi)^2,$$

et d'égaler cette dérivée à zéro. On trouve de la sorte

$$(5) \qquad v = \frac{1}{3} V \operatorname{tang} \varphi.$$

Telle est la valeur de la vitesse du maximum d'effet, relative au centre d'un élément superficiel quelconque.

Si l'on remplace v par sa valeur $v = r\omega$, il vient

$$(6) \qquad \operatorname{tang} \varphi = 3 \frac{\omega}{V} r.$$

Pour chaque vitesse V du vent, ω est une quantité constante, donc il en sera de même de $\frac{\operatorname{tang} \varphi}{r}$. Alors pour que l'équation (6) exprime la condition du maximum d'effet pour toutes les valeurs de V, il faudra prendre cette équation pour l'équation de l'aile rapportée aux coordonnées r et φ, mais en y faisant $\frac{\omega}{V}$ = constante ; ce qui d'ailleurs est conforme à l'expérience. Si l'on désigne par N le nombre des tours que la roue fait en une minute, on aura

$$\omega = \frac{\pi N}{30},$$

par suite la formule précédente devient

$$(7) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\pi}{10} \frac{N}{V} r.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(8) \qquad 3 \frac{\omega}{V} = \frac{\pi}{10} \frac{N}{V} = A,$$

l'équation (6) devient

(9) $$\tang \varphi = Ar.$$

Si l'on veut, par exemple, que la première latte, placée à 2 mètres de distance de l'axe de rotation, fasse avec celui-ci un angle de 62 degrés, on aura

$$A = \frac{1}{2} \tang 62^\circ = 0{,}94036.$$

Alors si l'on fait

$$r = 13^{m},$$

l'équation (9) donne

$$\varphi_1 = 85^\circ\, 19'\, 24'',7.$$

Si dans l'équation (5) on attribue à φ la valeur précédente, on trouve pour la vitesse de l'extrémité de l'aile,

$$v = (4{,}07491)\,V.$$

On voit que *cette vitesse est égale à très-peu près à quatre fois la vitesse du vent.*

La formule (8) donne ensuite, en y faisant $V = 4^m{,}05$,

$$N = 12{,}12.$$

CALCUL DU TRAVAIL DANS L'HYPOTHÈSE DU MAXIMUM D'EFFET RELATIF A LA VITESSE.

Si de la formule (1) on élimine r à l'aide de l'équation (9), il vient

$$T_r = -\frac{KDl}{g}\frac{\omega}{A^2}\left(V - \frac{\omega}{A}\right)^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \tang^2 \varphi \, d.\cos \varphi.$$

Intégrant par parties, on est conduit à l'intégrale

$$\frac{KDl}{g}\frac{\omega}{A^2}\left(V - \frac{\omega}{A}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} + \text{const.}\right).$$

Passant à l'intégrale définie, la valeur de T_r devient

$$T_r = \frac{4\,KDl}{27g}\frac{V^3}{A}\left(\frac{1 + \cos^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1} - \frac{1 + \cos^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0}\right);$$

faisant passer A sous les parenthèses, et observant que l'on a

$$A = \frac{\tang \varphi_0}{r_0} = \frac{\tang \varphi_1}{r_1},$$

on obtient

$$(10) \qquad T_r = \frac{4}{27} \frac{KDl}{g} V^3 \left(\frac{1 + \cos^2 \varphi_1}{\sin \varphi_1} r_1 - \frac{1 + \cos^2 \varphi_0}{\sin \varphi_0} r_0 \right).$$

D'après M. Coriolis, K = 1,5. (Voir *du Calcul de l'effet des Machines*, p. 213.) Prenant

$$r_0 = 2^m, \quad r_1 = 13^m, \quad l = 2^m, \quad \varphi_0 = 62^\circ,$$
$$\varphi_1 = 85^\circ 19' 24'', \quad D = 1^k,3, \quad V = 7^m,$$

la formule (10) donne

$$T_r = 209^{km},42 = 2^{ch},792.$$

Comparant ce résultat avec celui de la page 502, on trouve un différence de $10^{ch},29$. Or, quoique l'aile construite par la formule (9) ne soit pas identique avec l'aile hollandaise, il est pourtant difficile d'admettre qu'à surface égale les deux ailes puissent recevoir des quantités de travail si différentes. Cela tendrait à faire penser que le coefficient K = 1,5, dont l'exactitude ne semble pas hors de doute à M. Coriolis (*voir* l'ouvrage cité, p. 67), serait encore loin de la vérité.

Si l'on égale le travail donné par la formule (1) du n° 119 à celui de la formule (10), on trouverait, en regardant K comme inconnu,

$$K = 7 \text{ environ.}$$

Nous ferons remarquer, en terminant, que la formule (10) à laquelle on est conduit par la théorie, est pour ainsi dire de même forme que la formule (1) du n° 119, car le produit

$$l \left(\frac{1 + \cos^2 \varphi_1}{\sin \varphi_1} r_1 - \frac{1 + \cos^2 \varphi_0}{\sin \varphi_0} r_0 \right)$$

diffère peu de la surface Ω de l'aile.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

LIMITES DE L'ÉLASTICITÉ.

121. Lorsqu'un corps est soumis à une action mécanique, sa forme change plus ou moins.

Si, l'effort étant supprimé, le corps reprend exactement sa première forme, on dit qu'on n'a pas dépassé les limites de l'élasticité.

Ces limites ont été dépassées lorsque le corps conserve en tout ou en partie la forme qu'il vient de prendre.

RÉSISTANCE DES PRISMES A L'EXTENSION ET A LA COMPRESSION.

122. Lorsqu'un prisme est soumis à une action qui tend à l'allonger ou à le raccourcir, l'expérience démontre que *l'effort qu'on développe est proportionnel à la section droite du prisme, et à sa variation de longueur par unité linéaire, tant qu'on ne dépasse pas les limites de l'élasticité.* D'après cela, si l'on nomme :

E l'effort en kilogrammes capable de faire varier de 1 mètre la longueur d'un prisme qui aurait 1 mètre de long sur 1 mètre carré de section,

A la section droite d'un prisme quelconque exprimée en mètres carrés,

λ sa variation de longueur par mètre courant,

P l'effort capable de la produire, on aura

$$P = AE\lambda. \tag{1}$$

En même temps, si la longueur primitive du prisme est L, et l'allongement total l, les deux quantités l et λ seront liées par

la relation

$$(2) \qquad \lambda = \frac{l}{L}.$$

COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ.

La quantité E s'appelle coefficient d'élasticité. Ainsi l'on a pour

le fer en barres................ E = 20.000.000.000^{kil},
la fonte de fer à grains fins....... E = 12.000.000.000^{kil},
la fonte grise anglaise ordinaire... E = 9.096.000.000^{kil},
le chêne..................... E = 1.200.000.000^{kil} (*).

CALCUL DE L'EFFORT D'EXTENSION QUI RÉPOND A LA LIMITE DE L'ÉLASTICITÉ.

Si dans l'équation (1) on fait

$$(3) \qquad S = E\lambda,$$

elle deviendra

$$(4) \qquad P = AS.$$

S représente donc l'effort par mètre carré, capable de produire l'allongement λ relatif à l'unité linéaire; il s'ensuit que si l'on donne à λ la valeur qui répond à la limite de l'élasticité, S sera la limite de l'effort par mètre carré que le corps sera capable de supporter sans altération de son élasticité. Ainsi, par exemple, on a

pour le fer en barres..... $\lambda = 0^{m},000666$, S = 13.200.000^{kil},
pour la fonte à grains fins. $\lambda = 0^{m},00083$, S = 9.960.000^{kil},
pour le chêne.......... $\lambda = 0^{m},00167$, S = 2.004.000^{kil}.

Les charges que les corps peuvent supporter avec sécurité, et d'une manière permanente, sont au-dessous de la moitié des

(*) Ces nombres, et tous ceux dont nous ferons usage dans la suite, sont extraits de l'excellent ouvrage de M. le général Morin *Sur la résistance des matériaux* (2e édition). Nous y renvoyons le lecteur désireux de plus de détails.

valeurs de S déduites de la formule (3), excepté pour la fonte. *Les charges de sécurité* sont faites ordinairement égales au dixième et au sixième de l'effort capable de produire la rupture : au dixième pour les bois, et au sixième pour les métaux.

APPLICATIONS.

123. Problème. — *Calculer le diamètre des anneaux d'une chaîne en fer destinée à soulever des charges* P.

r étant le rayon de la section droite d'un anneau, celle-ci aura pour valeur πr^2, et comme il y en a deux, on aura

$$A = 2\pi r^2.$$

Substituant cette valeur de A dans l'équation (4) du numéro précédent, puis résolvant par rapport à r, il vient

$$(1) \qquad r = \sqrt{\frac{P}{2\pi S}}.$$

Si par exemple on suppose

$$P = 10.000^{kil}, \quad S = 4.000.000,$$

on trouve

$$2r = 0^{m},04.$$

124. Problème. — *Calculer le diamètre d'une tige de pompe élévatoire de l mètres de long, destinée à soulever un poids donné* P *d'eau en y comprenant celui du piston.*

r étant le rayon inconnu de la tige, D son poids sous l'unité de volume, le poids total sera

$$\pi r^2 D l;$$

par conséquent l'effort de traction aura pour valeur

$$P + \pi r^2 D l.$$

Soit S l'effort par mètre carré transmis à la tige, et que celle-ci peut supporter avec sécurité, l'effort total sera

$$\pi r^2 S,$$

et l'on aura pour déterminer r l'équation du deuxième degré

$$\pi r^2 S = P + \pi r^2 D l;$$

laquelle étant résolue donne

$$(1) \qquad r = \sqrt{\frac{P}{\pi(S - lD)}}.$$

Si $P = 0$, on devra avoir

$$S - lD = 0,$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad l = \frac{S}{D}.$$

Si dans cette dernière formule on donne à S la valeur qui répond à l'effort de rupture, on obtiendra la longueur l qui fera rompre la tige sous son propre poids.

Si par exemple la tige de pompe est en fer, et qu'on prenne

$$P = 628^{\text{kil}},$$
$$S = 4.166.667^{\text{kil}},$$
$$D = 7783^{\text{kil}},$$
$$l = 20^{\text{m}},$$

on trouve, par la formule (1),

$$2r = 0^{\text{m}},014.$$

Et si dans la formule (2) on fait

$$S = 4.166.667 \times 6,$$

on obtient

$$l = 3216^{\text{m}}.$$

Par conséquent une tige en fer, suspendue verticalement, se rompra sous son propre poids, lorsque sa longueur atteindra 3216 mètres.

125. Problème. — *Combien de boulons faut-il mettre au fond d'un cylindre à vapeur, pour résister à une pression intérieure donnée?*

Soit P la pression donnée exprimée en kilogrammes par mètre carré; r étant le rayon d'un boulon, et n le nombre de ceux-ci, l'effort sur chaque boulon sera, en nommant R le

rayon du cylindre,

$$\frac{\pi R^2 P}{n}.$$

Soit S l'effort par mètre carré que le métal d'un boulon développe pour résister à la pression ci-dessus; la résistance totale d'un boulon sera

$$\pi r^2 S,$$

et l'on aura pour déterminer r l'équation du deuxième degré

$$\pi r^2 S = \frac{\pi R^2 P}{n},$$

de laquelle on tire

(1) $$r = R\sqrt{\frac{P}{nS}}.$$

Maintenant, et afin que les têtes des boulons ne se touchent pas, posons

$$\frac{2\pi R}{n} > mr,$$

m étant un nombre choisi à volonté; remplaçant r par sa valeur ci-dessus, puis résolvant par rapport à n, il vient

(2) $$n < \frac{4\pi^2}{m^2}\frac{S}{P}.$$

Cette formule et la formule (1) résoudront le problème proposé.

Supposant, par exemple,

$$P = 103330^{kil} = 10^{atm},$$
$$S = 6.666.667^{kil} \text{ (fer en barres)},$$
$$m = 4,$$

on trouve d'abord, à l'aide de l'inégalité (2),

$$n < 159.$$

Prenant

$$n = 158,$$

on obtient ensuite par la formule (1)

$$r = (0,00991)\,R.$$

Supposant

$$R = 0^{m},20,$$

on a finalement

$$2r = 0^{m},02.$$

126. Problème. — *Quel diamètre faut-il donner à une tige d'une longueur* L, *tirée verticalement par un poids* P *qui doit l'allonger de l mètres?*

ϖ étant le poids de la tige, on a d'abord

$$P + \varpi = AE\lambda = AE\frac{l}{L}.$$

Mais si l'on nomme r son rayon, D le poids de sa matière sous l'unité de volume

$$A = \pi r^2, \quad \varpi = \pi r^2 DL.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, et résolvant par rapport à r, il vient

$$(1) \qquad r = \sqrt{\frac{P}{\pi\left(E\frac{l}{L} - DL\right)}}.$$

Supposons que la tige proposée soit en fer. Alors si l'on prend

$$E = 20.000.000.000^{kil},$$
$$P = 10000^{kil},$$
$$l = 0^{m},005,$$
$$L = 10^{m},$$
$$D = 7783^{kil},$$

on trouve

$$2r = 0^{m},034.$$

Les valeurs de S qui nous ont servi dans les exemples précédents sont extraites du tableau ci-après :

Table des efforts de traction longitudinale capables rupture, et de ceux qu'on peut faire supporter aux avec sécurité.

L'observation des bonnes constructions a conduit à admett permanents auxquels on peut soumettre les prismes et les cyli pas excéder :

Pour les bois, les pierres, les mortiers. $\frac{1}{10}$ } de la charg produire
Pour les métaux.................... $\frac{1}{6}$

DÉSIGNATION DES CORPS.	EFFORT PAR capable de produire la rupture.
BOIS.	kil
Chêne, dans le sens des fibres, fort..........	8,000,000
Chêne, dans le sens des fibres, faible.........	6,000,000
Tremble, dans le sens des fibres.............	6,500,000
Sapin, dans le sens des fibres................	8,500,000
Sapin des Vosges, dans le sens des fibres......	2,480,000
Frêne, dans le sens des fibres...............	12,000,000
Frêne des Vosges, dans le sens des fibres.......	6,780,000
Orme, dans le sens des fibres................	10,400,000
Orme des Vosges...........................	6,990,000
Hêtre, dans le sens des fibres................	8,000,000
Teak, dans le sens des fibres, employé aux constructions navales....................	11,000,000
Buis, dans le sens des fibres.................	14,000,000
Poirier, dans le sens des fibres...............	6,900,000
Acajou, dans le sens des fibres..............	5,600,000
Tremble des Vosges, dans le sens des fibres, employé dans les constructions navales......	7,200,000
Chêne, perpendiculairement aux fibres........	1,600,000
Peuplier, perpendiculairement aux fibres......	1,250,000
Chêne ou sapin.. { pièces droites, formées de morceaux assemblés par entailles ou crémaillères, arcs en planches de champ, ou en bois plié......	3,000,000
MÉTAUX.	
Fer forgé ou étiré. { le plus fort, de petit échantillon..	60,000,000
Fer forgé ou étiré. { le plus faible, de très-gros échantillon.......................	25,000,000
Fer en barres, moyen.......................	40,000,000



DÉSIGNATION DES CORPS.		EFFORT PAR MÈTRE CARRÉ capable de produire la rupture.	EFFORT PAR MÈTRE CARRÉ qu'on peut faire supporter avec sécurité.
		kil	kil
Fer ou tôle laminé.	tiré dans le sens du laminage. ...	41,000,000	6,833,333
	tiré dans le sens perpendiculaire au laminage.	36,000,000	6,000,000
Tôles fortes, corroyées dans les deux sens......		35,000,000	5,833,333
Fer dit *ruban*, très-doux....................		45,000,000	7,500,000
Fil de fer non recuit....	moyen, de 1 à 3 millimètres de diamètre.	60,000,000	10,000,000
	de l'Aigle, de 0^{mil},23 de diamètre..	90,000,000	15,000,000
	le plus fort de 0^{mil},5 à 1 millimètre de diamètre.	80,000,000	13,333,333
Fil de fer en faisceau, ou câble.............		30,000,000	5,000,000
Chaînes en fer doux.	ordinaires, à maillons oblongs..	24,000,000	4,000,000
	renforcées par des étançons. ...	32,000,000	5,333,333
Fonte de fer grise.....	la plus forte, coulée verticalement.	13,500,000	2,250,000
	la plus faible, coulée horizontalement.	12,500,000	2,083,333
Acier. ...	fondu, ou de cémentation, étiré au marteau, en petits échantillons..	100,000,000	16,666,667
	le plus mauvais, en gros échantillons, mal trempé.	36,000,000	6,000,000
	moyen.	75,000,000	12,500,000
Bronze des canons, moyennement.		23,000,000	3,833,333
Cuivre rouge.	laminé, dans le sens de la longueur.	21,000,000	3,500,000
	laminé, de qualité supérieure....	26,000,000	4,333,333
	battu.	25,000,000	4,166,667
	fondu...	13,400,000	2,223,333
Cuivre jaune ou laiton fin		12,600,000	2,100,000
Arcs ou pièces d'assemblages en fer forgé ou en fonte grise.		25,200,000	4,200,000
Cuivre rouge en fils, non recuit. ..	le plus fort au-dessous de 1 millimètre de diamètre.	70,000,000	11,166,667
	moyen, de 1 à 2 millimètres de diamètre.	50,000,000	8,333,333
	moyen, le plus mauvais........	40,000,000	6,666,667
Cuivre jaune en fils, non recuit. ...	le plus fort, au-dessous de 1 millimètre de diamètre.	85,000,000	14,166,667
	moyen, au-dessous de 1 millimètre de diamètre.	50,000,000	8,333,333

TRENTE-TROISIÈME LEÇOI

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (SUITE). — SPHÈRES SOUMIS A DES PRESSIONS INTÉRIEURES. — RÉSIST A LA COMPRESSION.

RÉSISTANCE D'UN CYLINDRE SOUMIS A UNE PRESSION

127. Considérons un cylindre plein de vapeı sion P (P sera toujours la pression en kilogramı carré), et cherchons la pression totale estimée p rement à la section faite dans le cylindre par u suivant l'axe. La pression normale sur un élémer face intérieure du cylindre sera $P\omega$. Soit x la dist ment ω au plan de la section, et r le rayon du composante de $P\omega$ estimée normalement au plan

$$P\omega\frac{x}{r}.$$

La somme F de toutes ces forces, étendue à tous la demi-surface du cylindre, aura pour valeur

$$F = \frac{P}{r}\Sigma\omega x.$$

Soit H la hauteur de celui-ci, et x_1 la distance au du centre de gravité de la demi-surface cylindriq des propriétés des moments

$$\pi r H x_1 = \Sigma\omega x;$$

par conséquent

$$F = P\pi H x_1.$$

Mais

$$x_1 = \frac{2}{\pi}r,$$

donc finalement

$$(1)\qquad F = 2PHr.$$

Nommons encore e l'épaisseur de la tôle ; la résistance par mètre carré que celle-ci développe sur les deux sections eH a pour expression

$$(2)\qquad F_1 = 2eHS;$$

on devra donc avoir, pour l'équilibre,

$$2PHr = 2eHS.$$

De là on tire

$$(3)\qquad P = \frac{e}{r}S.$$

Résolvant cette équation par rapport à e, il vient

$$e = \frac{P}{S}r.$$

A cette épaisseur, on ajoute ordinairement une épaisseur additionnelle δe, afin de mettre le cylindre à l'abri des accidents et des chocs résultant du transport et de la pose ; on aura donc

$$e = \frac{P}{S}r + \delta e;$$

ou, ce qui est la même chose,

$$e = \frac{P}{2S}2r + \delta e.$$

Soit n le nombre d'atmosphères contenues dans P, on aura

$$P = 10335^{kil} \times n;$$

par suite, la valeur de e devient

$$(4)\qquad e = \frac{5167,6}{S}n.2r + \delta e.$$

D'après M. Fairbairn, les rivures simples réduisent à moitié la résistance des tôles ; cette résistance est la même, à très-peu près, quand il y a deux rangs de rivets. Par conséquent on

devra prendre pour S (*voir* le Tableau de la page

$$S = 3.000.000^{\text{kil}}.$$

Substituant cette valeur dans la formule (4), et f

$$\delta e = 0^{\text{m}},003,$$

on obtient

$$(5) \qquad e = (0^{\text{m}},0018)\, n.2r + 0^{\text{m}},003 \ (*).$$

Telle est la formule que les règlements d'admin blique prescrivent pour le calcul de l'épaisseur d à vapeur.

APPLICATIONS.

Problème. — *Quelle sera la pression capable ter une chaudière à vapeur qui aurait 1 mètre et une épaisseur de tôle de 12 millimètres.*

Dans ce cas,

$$r = 0^{\text{m}},5, \quad e = 0^{\text{m}},012, \quad S = 18.000.00$$

Au moyen de ces valeurs, la formule (3) donne

$$P = 42,5^{\text{atm}},$$

en augmentant d'une atmosphère le résultat trou

RÉSISTANCE DU FOND D'UN CYLINDRE FONDU TOUT AVEC CELUI-CI.

Soient r le rayon intérieur du cylindre, et e son rayon extérieur sera $r + e$. Cela posé, la pressio peur exerce sur le fond aura pour valeur

$$\pi r^2 P.$$

D'un autre côté, la résistance développée sur la rieure

$$\pi e(2r + e),$$

est égale à

$$\pi e S(2r + e);$$

(*) Dans la pratique, on pourra diminuer d'une unité le no de la pression atmosphérique qui agit extérieurement sur la cha

donc on aura pour l'équilibre

$$\pi r^2 P = \pi e S(2r + e);$$

laquelle étant résolue par rapport à P, donne

$$(6) \qquad P = \frac{e}{r} S \left(2 + \frac{e}{r}\right).$$

En comparant cette valeur de P à celle fournie par l'équation (3), on reconnaît que *celle-ci est un peu plus que double de la première.*

ÉPAISSEUR DES TUYAUX POUR LA CONDUITE DES EAUX.

Lorsqu'on emploie la formule (4) au calcul de l'épaisseur des tuyaux pour la conduite des eaux, si l'on prend pour S les valeurs écrites vis-à-vis celles de e dans le tableau suivant, on trouve

Fer...........	$e = 0^m,00086\, n.2r + 0^m,003$,	$S = 6.000.000^{kil}$
Fonte.........	$e = 0,00238\, n.2r + 0,0085$,	$S = 2.170.000$
Cuivre laminé...	$e = 0,00147\, n.2r + 0,004$,	$S = 3.500.000$
Plomb.........	$e = 0,00242\, n.2r + 0,005$,	$S = 213.000$
Zinc..........	$e = 0,00620\, n.2r + 0,004$,	$S = 833.000$
Bois..........	$e = 0,0323\, n.2r + 0,027$,	$S = 160.000$
Pierres naturelles.	$e = 0,00363\, n.2r + 0,03$,	$S = 1.400.000$
Pierres factices...	$e = 0,00538\, n.2r + 0,04$,	$S = 960.000$

APPLICATIONS.

PROBLÈME. — *Quelle épaisseur faut-il donner à un tuyau de fonte recevant l'eau d'un réservoir élevé de 50 mètres ?*

Dans ce cas, la pression intérieure est de 50000 kilogrammes par mètre carré, ou de $4^{atm},9$. Prenant $n = 5$, et supposant $2r = 0^m,1$, la seconde des formules ci-dessus donne

$$e = 0^m,01.$$

RÉSISTANCE D'UNE SPHÈRE SOUMISE A UNE PRESSION INTÉRIEURE.

128. Considérons une section qui passe par le centre de la sphère, et cherchons l'effort perpendiculaire au plan de cette section. La pression normale sur un élément ω de la surface

intérieure sera $P\omega$. Soit x la distance de l'élém
sécant, et r le rayon de la sphère; la composant
male au plan de la section, aura pour valeur

$$P\omega\frac{x}{r}.$$

La somme F de toutes ces forces étendue à tous l
la demi-sphère sera exprimée par

$$F=\frac{P}{r}\Sigma\omega x.$$

Soit x_1 la distance au plan sécant du centre d
demi-surface sphérique; on aura, d'après les p
moments,

$$2\pi r^2 x_1=\Sigma\omega x;$$

remplaçant $\Sigma\omega x$ par sa valeur, il vient

$$F=2P\pi r x_1.$$

Mais

$$x_1=\frac{1}{2}r;$$

donc

(1) $$F=P\pi r^2.$$

Nommons encore e l'épaisseur de la sphère;
développée sur la section

$$\pi e(2r+e)$$

a pour valeur

(2) $$F_1=\pi e S(2r+e).$$

Alors pour l'équilibre on devra avoir

$$P\pi r^2=\pi e S(2r+e);$$

d'où l'on tire

(3) $$P=\frac{e}{r}S\left(2+\frac{e}{r}\right).$$

Ce qui est la même formule que celle obtenue pour l
cylindre de même rayon que la sphère.



RÉSISTANCE DES POTEAUX EN BOIS A LA COMPRESSION.

129. Soient en mètres a la plus grande dimension transversale d'une pièce de bois, b la plus petite, et l sa longueur. La résistance à la compression dont les poteaux en bois sont capables d'une manière permanente, se calculent par les formules empiriques suivantes :

(1)

ESSENCE DES BOIS.	FORMULES A EMPLOYER.
Chêne fort	$P = 256.500.000 \frac{ab^3}{l^2}$ kil.,
Chêne faible	$P = 180.000.000 \frac{ab^3}{l^2}$ kil.,
Sapin rouge et blanc, fort, et pin résineux	$P = 214.200.000 \frac{ab^3}{l^2}$ kil.,
Sapin blanc faible, et pin jaune	$P = 160.000.000 \frac{ab^3}{l^2}$ kil.

PILOTS.

D'après Rondelet, *chaque centimètre carré de la section d'un pilot peut supporter, d'une manière permanente, de* 30 *à* 35 *kilogrammes*. D'après cela, *supposons qu'on veuille calculer le nombre de pilots nécessaires pour supporter un édifice d'un poids* donné P.

r étant le rayon d'un pilot, sa section en centimètres carrés sera

$$10000\,\pi r^2;$$

la charge qu'il pourra supporter aura donc pour valeur

$$300000\,\pi r^2 \text{ kil.};$$

n pilots seront donc capables de résister à une charge de

$$300000\,n\pi r^2 \text{ kil.}$$

Or il est évident que le nombre des pilots devra être réglé de telle manière qu'on ait

$$300000\,n\pi r^2 > P:$$

de là on tire

$$(2) \qquad n > \frac{P}{300000\,\pi r^2}.$$

Si l'on prend, par exemple,

$$P = 20.000.000 \text{ kil.}, \quad r = 0^{m},15,$$

on trouve

$$n > 1414.$$

RÉSISTANCE DES COLONNES EN FONTE.

130. Pour calculer les charges permanentes de
fonte, M. Hodgkinson, habile physicien anglais
formules empiririques suivantes :

Pour les colonnes pleines à bases plates,

$$(1) \qquad P = 1780\,\frac{d^{3,6}}{H^{1,7}} \text{ kil.};$$

et pour les colonnes creuses à bases plates,

$$(2) \qquad P = 1780\,\frac{d'^{3,6} - d^{3,6}}{H^{1,7}}.$$

Dans ces relations d et d' sont les diamètres intér
rieur de la colonne, H sa hauteur. De plus d et
des centimètres, H des décimètres.

APPLICATIONS.

Problème. — *Proposons-nous de calculer*
d'une colonne pleine de $2^{m},50$ *de hauteur, et*
supporter une charge de 60.000 *kilog.*

On tire d'abord de l'équation (1)

$$(3) \qquad d = \sqrt[3,6]{\frac{PH^{1,7}}{1780}} \text{ centimètres.}$$

Mais dans ce cas

$$P = 60.000^{\text{kil}}, \quad H = 25^{\text{déc}};$$

au moyen de ces valeurs, la formule (3) donne,

quant le calcul par les logarithmes,

$$d = 12^c,15.$$

Problème. — *Proposons-nous de calculer le diamè intérieur d'une colonne creuse de* $2^m,50$ *de longueur, aya* $0,20$ *de diamètre extérieur, et destinée à supporter u charge de* 30.000 *kilog.*

On tire d'abord de l'équation (2)

$$(4) \qquad d = \sqrt[3,6]{d'^{3,6} - \frac{PH^{1,7}}{1780}} \text{ centimètres.}$$

Mais dans ce cas

$$P = 30.000^{kil}, \quad H = 25^d, \quad d' = 20^c;$$

au moyen de ces valeurs, la formule (4) donne, en y app quant le calcul par les logarithmes,

$$d = 19^c.$$

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (SUITE). — DE LA FLEXION ET DE LA TORSION.

131. Quand on courbe une pièce de bois ou de métal, il est évident que les fibres (files de molécules) situées à la partie convexe s'allongent, tandis que celles de la partie concave se compriment. *Il doit donc y avoir des fibres dont la longueur ne change pas*. Les fibres *invariables*, ainsi qu'on le verra plus loin, forment une surface cylindrique passant par les centres de gravité de toutes les sections normales à la longueur du solide. Si l'on divise celui-ci en deux parties symétriques par un plan mené suivant l'axe, ce plan coupera la surface des fibres invariables suivant une courbe qu'on nomme plus particulièrement *ligne des fibres invariables*.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS PRISMATIQUE ENCASTRÉ PAR UNE DE SES EXTRÉMITÉS.

Considérons un corps prismatique (*fig.* 208) fixement encastré en ABCD et sollicité à son extrémité opposée par une force P que je supposerai sensiblement normale à la surface du corps. Soit aussi xy la ligne des fibres invariables. Après que l'équilibre s'est établi, toute translation et toute rotation des molécules ayant cessé, il résulte des conditions générales de l'équilibre :

Fig. 208.

1°. Que la résultante des réactions moléculaires qui se développent sur une section quelconque ce, et qui lui sont perpendiculaires, est nulle;



2°. Que ces réactions et la force P se font équilibre autour d'un axe de rotation mené par le point a perpendiculairement au plan de la figure.

En vertu de ce qui vient d'être dit, la somme des forces, telles que q, qui tendent à raccourcir les fibres allongées, sera donc égale à la somme des forces telles que q_1, qui tendent à allonger les fibres raccourcies; par conséquent, si l'on regarde les forces q comme positives, les forces q_1 comme négatives, on aura

$$\Sigma q = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les points de la section. Faisons dans le solide une deuxième section normale infiniment voisine de ce, et soit df cette section; chacune des lignes Oa, Ob représentera le rayon de courbure de xy aux points a et b. Je pose en même temps

$$ab = s, \quad ma = z,$$

et je mène ah parallèle à Ob; les triangles semblables amn, Oab donnent

(1) $$\frac{mn}{s} = \frac{z}{r}.$$

Mais avant la flexion toutes les fibres comprises entre ce et df avaient pour longueur commune

$$ab = s;$$

de là il suit que la fibre dirigée suivant mn s'est allongée de mn; donc la force q à laquelle est dû cet allongement a pour valeur, en nommant a l'aire de la section de la fibre,

$$q = a\text{E}\frac{mn}{s}.$$

Remplaçant $\frac{mn}{s}$ par sa valeur ci-dessus, il vient

$$q = \frac{a\text{E}z}{r}.$$

Pour une deuxième fibre on aurait pareillement

$$q' = \frac{a'\text{E}z'}{r};$$

pour une troisième,

$$q'' = \frac{a'' E z''}{r},$$

et ainsi de suite; les quantités $z, z, z'', \ldots$, étai négatives, suivant qu'elles sont comptées au-des sous de l'horizontale menée par le point a dan section ce. Ajoutant ces égalités membre à me lant la somme à zéro, on trouve

$$\frac{E}{r}(az + a'z' + a''z'' + \ldots) = 0.$$

Soit Ω l'aire de la section, et z_1 la distance de gravité à l'axe de rotation a; on aura, par les moments,

$$\Omega z_1 = az + a'z' + a''z'' + \ldots,$$

par suite l'égalité ci-dessus devient

$$(2) \qquad \frac{E}{r}\Omega z_1 = 0,$$

d'où

$$z_1 = 0.$$

Donc *lorsqu'un corps prismatique fixement en bout est soumis à l'action d'une ou de plusieu restent sensiblement perpendiculaires à sa surf des fibres invariables passera par le centre de gr cune des sections normales du solide.*

Si la composante de P perpendiculaire au plan ce n'était pas négligeable, on aurait, en nomm que la force fait avec le plan,

$$\frac{E}{r}\Omega z_1 = P \sin \varphi,$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad z_1 = \frac{Pr}{E\Omega} \sin \varphi.$$

Cette équation fera connaître la position de

fibres invariables par rapport au centre de gravité de la section Ω.

Recherchons maintenant la condition qui doit être remplie pour que la force P fasse équilibre aux réactions moléculaires normales à *ce*. Comme la force P et les forces q, q_1, etc., tendent à produire une rotation autour de l'horizontale qui se projette en a, il faut, pour l'équilibre, que la somme des moments de ces forces projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe a de rotation soit nulle; par conséquent, si l'on nomme p le bras de levier ak de la force P, on aura

$$Pp = qz + q'z' + q''z'' + \ldots,$$

Mais, en vertu de ce qui précède,

$$qz = \frac{aE}{r}z^2,$$

$$q'z' = \frac{a'E}{r}z'^2,$$

$$q''z'' = \frac{a''E}{r}z''^2.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, il vient

$$Pp = \frac{E}{r}(az^2 + a'z'^2 + a''z''^2 + \ldots).$$

Or $az^2 + a'z'^2 + a''z''^2 + \ldots$ n'est autre chose que le moment d'inertie de l'aire de la section *cc* pris par rapport à l'horizontale menée par son centre de gravité; donc si l'on désigne par i ce moment d'inertie, on aura

$$(4) \qquad Pp = \frac{Ei}{r},$$

ce qui est l'équation d'équilibre qu'il fallait obtenir.

Nous n'avons pas tenu compte, dans ce qui précède, des réactions agissant dans le plan de la section, attendu que les moments de toutes ces forces sont nuls.

L'équation (4) peut encore s'exprimer d'une autre manière

qui en rendra les applications pratiques plus l
cela, remarquons que l'équation (1) donne

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{z}\frac{mn}{s}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{1}{r}$ dans la relation :
trouve

$$Pp=E\frac{mn}{s}\frac{i}{z}.$$

Mais $E\frac{mn}{s}$ est l'effort S par mètre carré capabl
l'allongement $\frac{mn}{s}$ de la fibre située à la distance
de gravité de la section que l'on considère; au m :
valeur, l'équation d'équilibre devient

$$Pp=\frac{Si}{z},$$

et plus généralement

$$\Sigma Pp=\frac{Si}{z},$$

si la barre est sollicitée par plusieurs forces P. Si
que S se rapporte à la fibre la plus éloignée du c
vité de la section, on aura, dans le cas d'une for
en posant $z=z_1$,

$$(5)\qquad Pp=\frac{Si}{z_1}.$$

Pour la section d'encastrement, cette relation de

$$(6)\qquad Pc=\frac{Si}{z_1}.$$

Si le solide proposé est tel, qu'on ait.

$$\frac{i}{z_1}=\text{constante},$$

pour une même valeur de P, S sera d'autant plus
sera lui-même plus grand. De là il suit que *la sect*
trement est la section dangereuse.



APPLICATIONS.

Problème. — *Connaissant le poids d'un volant de machine à vapeur, déterminer le rayon de chaque tourillon.*

Pour résoudre les questions de ce genre, on commence par déterminer la charge que chaque tourillon devra supporter; puis on double la charge trouvée, à cause que les roues de cette sorte sont exposées à des mouvements brusques. Soit donc P la charge attribuée à l'un des tourillons; le coussinet exerçant sur celui-ci une réaction égale et contraire, c'est cette réaction qui tend à produire la rupture. Mais dans le cas d'un cylindre dont le rayon est r

$$z_1 = r, \quad i = \frac{1}{4}\pi r^4 \ (^*);$$

au moyen de ces valeurs l'équation (5) devient

$$Pp = \frac{1}{4}\pi S r^3,$$

de laquelle on tire

(7) $$r = \sqrt[3]{\frac{4Pp}{\pi S}}.$$

(*) En effet, imaginons que par le centre du cercle on ait mené deux diamètres perpendiculaires; x et y étant les coordonnées d'un élément quelconque a de la surface, et q sa distance au centre, on a

$$q^2 = x^2 + y^2.$$

Multipliant les deux membres par a, il vient

$$aq^2 = ax^2 + ay^2;$$

par conséquent aussi

$$\Sigma aq^2 = \Sigma ax^2 + \Sigma ay^2 = 2\Sigma ay^2 = 2i:$$

d'où

$$i = \frac{1}{2}\Sigma aq^2.$$

Mais

$$\Sigma aq^2 = \frac{1}{2}\pi r^4 \quad \text{(page 304)};$$

donc, enfin,

$$i = \frac{1}{4}\pi r^4.$$

Supposant, par exemple,

$$P = 20.000^{kil},$$
$$S = 6.666.667^{kil},$$
$$p = 0^m,15.$$

on trouve

$$2r = 0^m,166.$$

CAS OU LE SOLIDE SUPPORTE AUSSI UNE CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE.

Soit ϖ la charge du solide par mètre courant; la charge relative à la longueur p aura pour valeur

$$\varpi p;$$

et comme celle-ci a pour point d'application le milieu de p, son moment sera

$$\frac{1}{2}\varpi p^2;$$

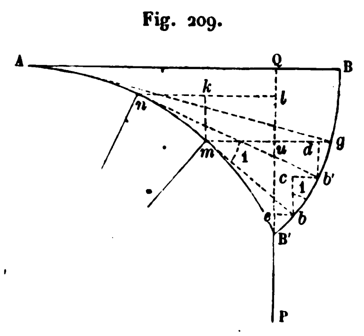
par suite l'équation d'équilibre deviendra

$$(8) \qquad \left(P + \frac{1}{2}\varpi p\right)p = \frac{Si}{z_1}.$$

FLEXION D'UN PRISME ENCASTRÉ PAR UN BOUT.

132. Soient AB la ligne des fibres invariables encastrée en A (*fig.* 209), et AB′ ce qu'elle devient sous l'effort de la force P; il est clair que AB′ est l'enveloppe de AB. Par conséquent, si BB′ est le chemin décrit par le point B, et qu'on mène les tangentes nb', mb, etc., on aura

Fig. 209.



$$AB = AB', \quad nb' = nB',$$
$$mb = mB', \ldots.$$

Considérons deux tangentes infiniment voisines mb, nb', et posons

$$mu = p.$$



La flexion

$$B'u = f,$$

qui répond au point quelconque m, se composera de la som
des flexions élémentaires $B'e$, bc, $b'd$,..., comprises depui
point B' jusqu'au point quelconque g situé sur le prolongem
de mu. Nommons comme précédemment r le rayon de co
bure du point m, posons encore $mn = s$, et proposons-n
de déterminer l'une quelconque bc de ces flexions élém
taires, ω étant l'angle compris entre les deux normales inf
ment voisines m, n, on a

$$s = r\omega, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{s}{r}.$$

Remarquons aussi que l'arc bb' peut être regardé comme
crit avec l'un des rayons mb ou nb'; alors on aura, en obs
vant que l'angle $bnb' = \omega$,

$$bb' = \omega . mb = \omega . mB'.$$

Remplaçant ω par sa valeur ci-dessus, on trouve

$$bb' = \frac{mB'.s}{r}.$$

Comparons maintenant les triangles semblables $bb'c$, m
La comparaison des côtés homologues donne

$$\frac{bb'}{bc} = \frac{mn}{nk}, \quad \text{d'où} \quad bb' = \frac{s}{nk} bc.$$

Égalant les deux valeurs de bb', il vient

$$\frac{mB'.s}{r} = \frac{s}{nk} \cdot bc;$$

de là on tire

$$bc = \frac{mB'.nk}{r}.$$

Mais dans la pratique on n'admet que des flexions très-peti
De là il résulte que la quantité mB' ne diffère pas sensil
ment de sa projection mu; alors si l'on pose

$$mu = x, \quad nk = dx,$$

on aura

$$bc = \frac{xdx}{r}.$$

Remarquons maintenant que l'égalité (4) du numéro précédent donne

$$\frac{1}{r}=\frac{Px}{Ei};$$

substituant cette valeur dans bc, il vient

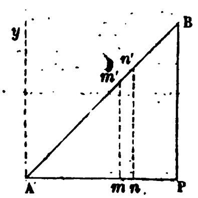
$$(1)\qquad bc=\frac{P}{Ei}x^2dx.$$

Telle est l'expression de la flexion élémentaire de la barre, quand elle passe de la position Anb' à la position Anmb. Maintenant si on fait la somme de toutes les quantités telles que (1) répondant aux diverses valeurs de x comprises depuis $x=0$ jusqu'à $x=mu=p$, on aura la quantité f, savoir

$$(2)\qquad f=\frac{P}{Ei}\Sigma x^2dx.$$

Pour obtenir la valeur de cette somme, construisons un triangle rectangle, dont les deux côtés AP, BP de l'angle droit (*fig.* 210) soient égaux à $mu=p$, puis prenons

Fig. 210.



$$Am=x,\quad mn=dx.$$

En élevant les perpendiculaires mm', nn' on formera un trapèze infiniment petit qui aura pour mesure

$$mm'.mn=xdx.$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par

$$Am=mm'=x,$$

il vient

$$mm'.mn.Am=x^2dx.$$

Or $mm'.mn.Am$ est le moment de l'élément superficiel $mm'nn'$ par rapport à l'axe Ay, donc Σx^2dx est la somme des moments de tous les éléments analogues compris dans le triangle APB. Mais le moment de ce triangle a pour valeur

$$\frac{1}{2}AP.BP.\frac{2}{3}AP=\frac{1}{3}p^3;$$

donc enfin

(3) $$f = \frac{1}{3} \frac{Pp^3}{Ei}.$$

Si dans cette formule on fait $p = c$, c étant la longueur
mitive de la barre, on aura la flexion totale.

Si dans l'équation (3) on remplace Pp par sa valeur (5
numéro précédent, on trouve

(4) $$f = \frac{1}{3} \frac{S}{E} \frac{p^2}{z_1},$$

S étant toujours l'effort par mètre carré transmis aux fi
de la surface.

* Le calcul intégral appliqué à l'équation (2) donnerait
médiatement la valeur de f. Si le corps n'était pas un pris
on aurait $i = F(x)$, et il faudrait en tenir compte dans l
tégration.

FLEXION D'UN PRISME ENCASTRÉ PAR SES DEUX BOUTS, ET SO A UNE CHARGE 2 P AGISSANT EN SON MILIEU.

La barre proposée exerçant une pression P sur chacun
ses points d'appui, reçoit de ceux-ci une pression égale et
traire; on peut donc la supposer entièrement libre, pou
qu'on la regarde comme sollicitée par ces deux nouve
forces. Mais alors la barre peut être regardée comme encas
en son milieu, car l'encastrement en ce point n'aura d'a
effet que de développer une réaction égale à 2P et de m
sens; donc, en vertu de ce qui précède, *la flexion de la b
sera la même que si elle était encastrée par un seul b
après avoir été réduite à la moitié de sa longueur, comme
moitié de sa charge*. Par conséquent la flexion sera donnée
l'une ou l'autre des formules

(5) $$f = \frac{1}{3} \frac{Pc^3}{Ei}.$$

(6) $$f = \frac{1}{3} \frac{S}{E} \frac{c^2}{z_1}.$$

Cette théorie de la flexion est due à M. le général Ponc

SOLIDES D'ÉGALE RÉSISTANCE. — SOLIDES A SECTION RECTANGULAIRE.

133. Considérons un solide encastré par un bout, et sollicité par une force P agissant comme il a été dit précédemment. L'équation d'équilibre entre la force P et les réactions moléculaires développées sur une section normale quelconque est exprimée par la formule

$$\mathrm{P}p = \frac{\mathrm{S}i}{z_1}.$$

Mais ici

$$i = \frac{1}{12}ab^3, \quad z_1 = \frac{1}{2}b,$$

en nommant a et b les dimensions horizontale et verticale du rectangle (pages 301 et 298); par conséquent

$$\mathrm{P}p = \frac{1}{6}\mathrm{S}ab^2:$$

d'où l'on tire

(1) $$\mathrm{S} = \frac{6\mathrm{P}}{a}\frac{p}{b^2}.$$

Mais pour que le solide n'offre pas plus de chances de rupture dans un endroit que dans l'autre, il faut que S soit une quantité constante; donc si l'on prend a invariable, on devra avoir

$$\frac{p}{b^2} = \text{const.}$$

Soit b_0 la hauteur de la pièce mesurée sur la section d'encastrement; on aura

$$\frac{c}{b_0^2} = \text{const.}$$

et par suite

(2) $$b^2 = \frac{b_0^2}{c}p.$$

Ce qui est l'équation d'une parabole ayant son sommet au point d'application de la force, et dont les coordonnées hori-

zontale et verticale sont p et $\frac{1}{2}b$. Par conséquent, *pour être d'égale résistance, les solides à section rectangulaire doivent être terminés par deux cylindres paraboliques*. Tels sont par exemple les balanciers des machines à vapeur, dont chaque moitié peut être regardée comme encastrée au point de rotation.

SOLIDE SOUMIS UNIQUEMENT A UNE CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE.

Supposons toujours le solide à section rectangulaire, mais soumis uniquement à une charge uniformément répartie, telle qu'un poids. Puisque dans ce cas $P = o$, l'équation d'équilibre sera (*voir* l'équation 8 du n° 131)

$$\frac{1}{2}\varpi p^2 = \frac{Si}{z_1}.$$

Or

$$i = \frac{1}{12}ab^3, \quad z_1 = \frac{1}{2}b,$$

donc

$$(3) \qquad S = \frac{3\varpi}{a}\frac{p^2}{b^2}.$$

a étant supposé constant, pour que S le soit aussi, on devra avoir

$$\frac{p}{b} = \text{const.}$$

Mais pour la section d'encastrement

$$p = c, \quad b = b_0,$$

donc

$$\text{const.} = \frac{c}{b_0}.$$

Par conséquent, pour être d'égale résistance, la surface du solide devra avoir pour équation

$$(4) \qquad b = \frac{b_0}{c}p.$$

Le solide proposé aura donc la forme d'un triangle rectangle vertical, dont les deux côtés de l'angle droit seront c et b_0. Telles sont, par exemple, les consoles qui soutiennent les balcons.

SOLIDES A SECTIONS CIRCULAIRES.

Reprenons l'équation d'équilibre

$$Pp = \frac{Si}{z_1}.$$

Nommant r le rayon d'une section quelconque, on a

$$i = \frac{1}{4}\pi r^4, \quad z_1 = r,$$

et la relation ci-dessus devient

$$Pp = \frac{1}{4} S\pi r^3.$$

De là on tire

(5) $$S = \frac{4P}{\pi}\frac{p}{r^3}.$$

Par conséquent, afin de rendre le solide d'égale résistance, on devra poser

$$\frac{p}{r^3} = \text{const.}$$

Pour la section d'encastrement

$$p = c, \quad r = r_0,$$

par suite

$$\text{const.} = \frac{c}{r_0^3};$$

donc enfin

$$p = \frac{c}{r_0^3} r^3;$$

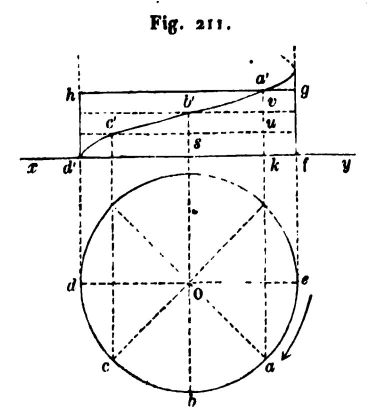
ce qui est l'équation d'une parabole cubique ayant son sommet au point d'application de la force. On voit par là que *toutes les sections diamétrales du solide seront des paraboles cubiques.*

Si le solide était encastré par ses deux bouts et soumis à une charge 2 P agissant en son milieu, on regarderait chaque moitié comme encastrée par un bout, et supportant une charge P à l'autre extrémité.

DE LA TORSION. — TORSION D'UN CYLINDRE

134. Considérons par exemple un arbre de transmission, sollicité à l'une de ses extrémités par la force motrice, à l'autre extrémité, ou en plusieurs de ses points, par la résistance. Les diverses sections du cylindre éprouveront évidemment, à partir du point d'application de la force motrice, et dans les premiers instants du mouvement, des rotations ou *torsions* autour de l'axe, qui se transmettront de proche en proche jusqu'à l'autre extrémité du cylindre, laquelle ne commencera à tourner que lorsque toutes les sections qui précèdent la dernière auront éprouvé les effets de la torsion. Dans ces déplacements successifs, chaque file de molécules situées sur un rayon restant toujours sur celui-ci, si l'on partage la longueur du cylindre en parties égales, la torsion d'une section, par rapport à la suivante regardée comme fixe, sera partout la même. Par conséquent, si l'on décompose le cylindre en tranches cylindriques infiniment minces, les files de molécules situées sur les génératrices de chaque cylindre se courberont sur la surface de celui-ci en hélices de même pas, mais dont l'inclinaison sur le plan de la base augmentera à mesure que le rayon diminuera.

Fig. 211.



Considérons, par exemple, le cylindre qui se projette horizontalement sur le cercle O, et verticalement en *d'fhg*. Si nous imprimons à ce cylindre un mouvement de rotation dans le sens de la flèche, le pied *a* de la génératrice (*a*, *ka'*) se sera

transporté par exemple en d au moment où l'extrémité hg du cylindre commencera à se mouvoir; la génératrice $(a, a'k)$ se sera donc courbée en hélice, et sera devenue $(abcd, a'b'c'd')$. De même le point (a, u) de cette ligne s'est transporté en (c, c'), le point (a, v) en (b, b'), etc. De là il suit que la section $d'f$ aura tourné de l'angle aOd qu'on nomme *angle de torsion*, la section $c'u$ de l'angle aOc, la section $b'v$ de l'angle aOb, et ainsi de suite.

ÉQUILIBRE D'UN CYLINDRE SOUMIS A UNE OU PLUSIEURS FORCES DE TORSION.

Lorsqu'un cylindre est soumis à un effort de torsion, l'expérience démontre que cet effort, tant qu'on ne dépasse pas les limites de l'élasticité, est proportionnel à la section droite du solide, et à la torsion par unité de longueur. D'après cela, si l'on nomme

E' l'effort en kilogrammes capable de produire une torsion de 1 mètre sur un cylindre qui aurait 1 mètre de long sur 1 mètre carré de section,

A la section droite d'un cylindre quelconque exprimée en mètres carrés,

λ la torsion par mètre de longueur,

P l'effort capable de la produire,

On aura

$$P = AE'\lambda. \quad (1)$$

La quantité E' s'appelle *coefficient d'élasticité de glissement*. D'après M. le général Morin, on a

Fer doux..........	$E' =$	6.000.000.000 kil.,
Fer en barres.......	$E' =$	6.666.000.000 kil.,
Acier d'Allemagne...	$E' =$	6.000.000.000 kil.,
Acier fondu très-fin..	$E' =$	10.000.000.000 kil.,
Fonte............	$E' =$	2.000.000.000 kil.,
Cuivre...........	$E' =$	4.366.000.000 kil.,
Bronze...........	$E' =$	1.066.000.000 kil.,
Chêne...........	$E' =$	400.000.000 kil.,
Sapin............	$E' =$	433.000.000 kil.



Considérons maintenant deux sections infiniment voisines $c'u$, $b'v$, et prenons un filet quelconque $b's$, situé à la distance r de l'axe du cylindre; ce filet devenant $b'c'$ par l'effet de la torsion, l'effort capable de la produire (ou, ce qui revient au même, la résistance à la torsion) a pour valeur, en nommant a la section du filet,

$$p = \mathrm{E}' a \frac{\text{arc } bc}{b's}.$$

Soit l la longueur de l'arbre; en vertu de la définition de l'hélice,

$$\frac{\text{arc } bc}{b's} = \frac{\text{arc } ad}{a'k} = \frac{\text{arc } ad}{l}.$$

Substituant cette valeur dans celle de p, il vient

$$p = \mathrm{E}' a \frac{\text{arc } ad}{l}.$$

Mais

$$\text{arc } ad = r\Omega,$$

Ω étant la torsion angulaire; donc

$$p = \frac{\mathrm{E}'\Omega}{l} ar.$$

Remarquons maintenant que le moment de la force p est pr, par conséquent

$$pr = \frac{\mathrm{E}'\Omega}{l} ar^2.$$

Pour un deuxième filet matériel pris dans la même section et distant de l'axe d'une quantité r', on a pareillement

$$p' r' = \frac{\mathrm{E}'\Omega}{l} a' r'^2.$$

Pour un troisième filet on aura de même

$$p'' r'' = \frac{\mathrm{E}'\Omega}{l} a'' r''^2,$$

et ainsi de suite. Ajoutant toutes ces égalités m bre, la somme des moments des forces molécu pées sur une section quelconque deviendra

$$\Sigma pr = \frac{E'\Omega}{l}(ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2 + \ldots$$

Mais $ar^2 + a'r'^2 + a''r'^2 + \ldots$, n'est autre cho ment d'inertie de la section par rapport à l'ax nommant i ce moment d'inertie, il vient

$$\Sigma pr = \frac{E'\Omega}{l} i.$$

Or, pour l'équilibre, la somme des moments de culaires doit être égale à la somme des moments térieures; nommant ΣPp la somme des momen nières forces, on obtient enfin, pour l'équation

$$(2) \qquad \Sigma Pp = \frac{E'\Omega}{l} i.$$

Maintenant soit R le rayon du cylindre; le mo i ayant pour valeur

$$i = \frac{1}{2}\pi R^4 \quad \text{(page 304)},$$

l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \frac{2\Sigma Pp}{\pi R^3} = E'\frac{\Omega R}{l};$$

et s'il n'y a qu'une seule force de torsion,

$$(4) \qquad \frac{2Pp}{\pi R^3} = E'\frac{\Omega R}{l}.$$

APPLICATIONS.

PROBLÈME. — *Soit proposé de calculer le di arbre de transmission en fer de* 3 *mètres de l une force de* 6000 *kilogrammes, agissant à l'ex*

bras de levier de $0^m,50$, *et sous la condition que l'angle de torsion ne soit que de* 1 *minute.*

On tire d'abord de la formule (4)

$$(5) \qquad R = \sqrt[4]{\frac{2\,Ppl}{\pi E' \Omega}}.$$

Mais dans ce cas

$$P = 6000 \text{ kil.},$$
$$E' = 6.666.000.000 \text{ kil.},$$
$$p = 0^m,50,$$
$$l = 3^m,$$
$$\Omega = \frac{\pi}{10800}.$$

Au moyen de ces valeurs, la formule (5) donne

$$2R = 0^m,186.$$

D'après M. le général Morin, on peut, avec une entière sécurité (*voir* l'ouvrage déjà cité, page 464), adopter les valeurs suivantes pour le deuxième membre de l'équation (4) :

Tableau des valeurs de $E'\dfrac{\Omega R}{l}$.

	ARBRES	
	allégés.	forts.
		$\frac{1}{2}$
Fer et acier. .	4.002.000	2.001.000,
Fer.	1.334.000	667.000,
Chêne.	266.000	133.000,
Sapin.	288.811	144.405.

Si l'on prend, par exemple,

$$E'\frac{\Omega R}{l} = 2.001.000,$$

on trouve, en prenant pour P et p les valeurs de l'exemple précédent,

$$2R = 0^m,1968.$$

EXEMPLES DE TORSION.

135. D'après les expériences de M. Duleau
fer forgé du Périgord, de $2^{m},80$ de long sur o
mètre, a supporté sans se rompre une torsion
duite par une charge de 10 kilogrammes, agis
mité d'un levier de $0^{m},32$.

Il résulte également d'expériences faites à M
arbre en fonte (de Bouchot, Franche-Comté) a
long sur $0^{m},10$ de diamètre, sollicité par une cha
logrammes, agissant à l'extrémité d'un bras de l
tres, a donné lieu à un angle de torsion de 15
une charge de 2080 kilogrammes, la torsion s'est é
Enfin, l'arbre s'est rompu sous une charge
grammes.

FIN.

ERRATA.

Supprimez :

A la page 244, depuis la formule (15) exclusivement, jusques et y compris la formule (17).

A la page 249, depuis la formule (32) exclusivement, jusques et y compris la formule (34).



